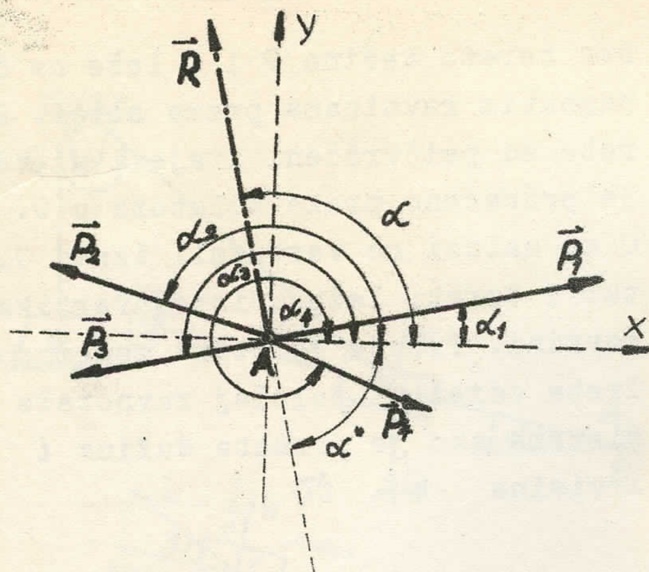
ZADACI IZ STATIKE,
KINEMATIKE I DINAMIKE

S A D R Ž A J

1. ZADATAK



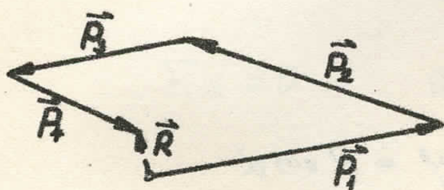
Zadano:

$P_1 = 5$ kN $\alpha_1 = 18^\circ 2o'$
$P_2 = 4$ kN $\alpha_2 = 164^\circ 4o'$
$P_3 = 3$ kN $\alpha_3 = 198^\circ 2o'$
$P_4 = 2$ kN $\alpha_4 = 337^\circ 2o'$

R = ? α = ?

(grafički i analitički)

a.) Grafički



b.) Analitički

$$\left.\begin{aligned}\sum x &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = R_x \\ \sum y &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = R_y\end{aligned}\right\}$$

$x_1 = P_1 \cdot \cos\alpha_1$ $y_1 = P_1 \cdot \sin\alpha_1$

$x_2 = P_2 \cdot \cos\alpha_2$ $y_2 = P_2 \cdot \sin\alpha_2$

$x_3 = P_3 \cdot \cos\alpha_3$ $y_3 = P_3 \cdot \sin\alpha_3$

$x_4 = P_4 \cdot \cos\alpha_4$ $y_4 = P_4 \cdot \sin\alpha_4$

Tablica:

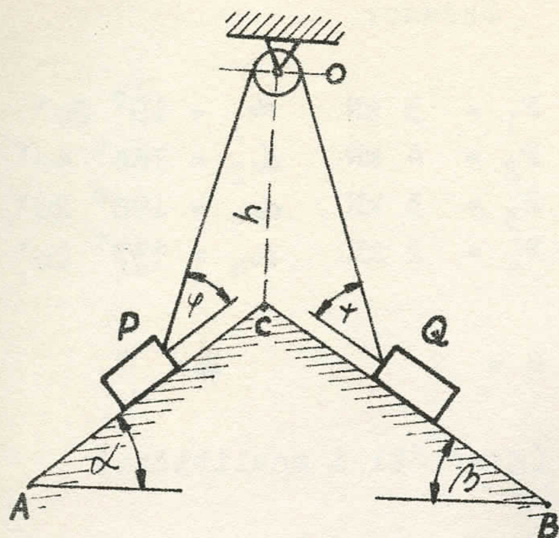
Sila	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$P_i \cos\alpha_i$ kN	$P_i \sin\alpha_i$ kN
P_1	o,949	o,315	4,745	1,575
P_2	-o,964	o,264	-3,856	1,o56
P_3	-o,949	-o,315	-2,847	-o,945
P_4	o,923	-o,385	1,846	-o,77
		Σ (+)	6,591	2,631
		Σ (-)	-6,7o3	-1,715
		R_x	-o,112	-
		R_y	-	o,916

Veličina:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{(-o,112)^2 + (o,916)^2} = o,923 \text{ kN}$$

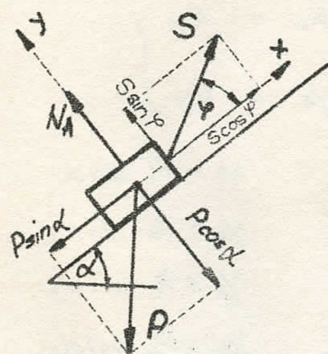
Pravac rezultante: $tg\alpha = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{o,916}{o,112} = -8,178 \rightarrow \alpha^* = -83^\circ$ prolazi u 2. i 4. kvadrantu i zato treba vrijednost α odbiti od 180° tj. $\alpha = 180^\circ - 83^\circ \rightarrow \alpha = 97^\circ$

$$\left.\begin{aligned}R_x &= (\,-\,) \\ R_y &= (\,+\,)\end{aligned}\right\} R$$



Dva tereta težina P i Q leže na dvjema nagnutim ravninama prema slici. Za terete su pričvršćeni krajevi užeta, koje je prikačeno preko kolutura u O. Tačka O se nalazi na vertikali iznad C. Kolotur i tereti leže u istoj vertikalnoj ravnini. Trenje kolotura zanemarujemo. Treba odrediti položaj ravnoteže ovog sistema ako je poznata dužina l užeta i visina $h = \overline{CO}$

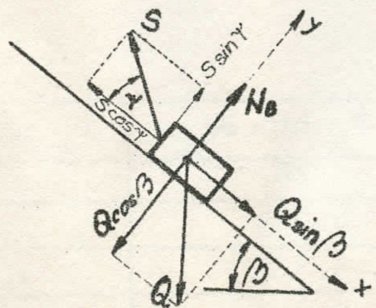
1.)



$$\Sigma X = 0$$

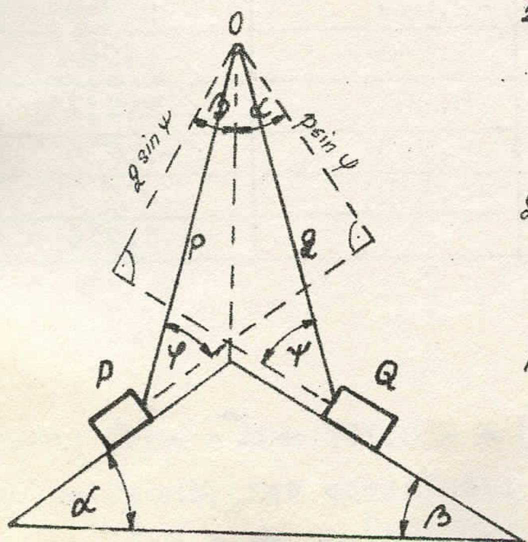
$$S\cos\varphi = P\sin\alpha$$

2.)



$$\Sigma X = 0$$

$$S\cos\psi = Q\sin\beta$$



$$\frac{1.)}{2.)}: \quad \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{P\sin\alpha}{Q\sin\beta} \rightarrow P\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} = Q\frac{\sin\beta}{\cos\psi}$$

$$p + q = l \qquad h = \frac{p\sin\varphi}{\cos\alpha} = \frac{q\sin\psi}{\cos\beta}$$

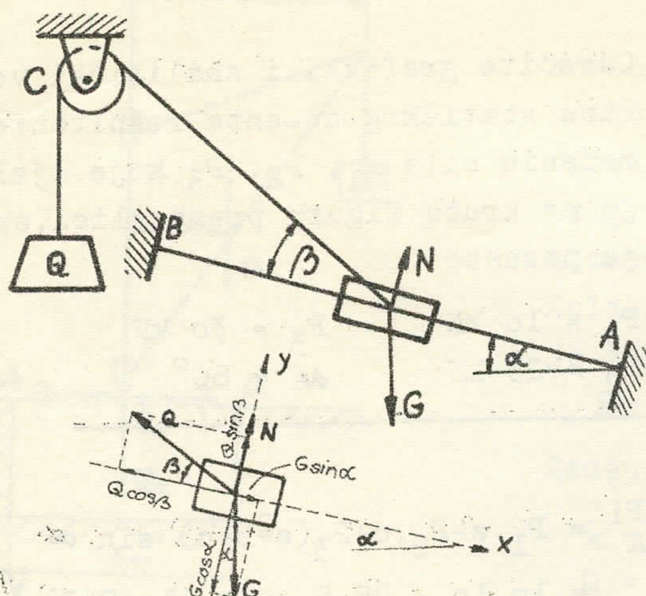
$$q = l - p \qquad p = h\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}$$

$$p\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = (l-p)\frac{\sin\psi}{\cos\beta} \rightarrow p\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} + \frac{\sin\psi}{\cos\beta}\right) = l\frac{\sin\psi}{\cos\beta}$$

$$h\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} + \frac{\sin\psi}{\cos\beta}\right) = l\frac{\sin\psi}{\cos\beta}$$

$$1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\psi}{\cos\beta} = \frac{l}{h}\cdot\frac{\sin\psi}{\cos\beta} \quad \Big/ \; \frac{\cos\beta}{\sin\psi}$$

$$\frac{\cos\beta}{\sin\psi} + \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} = \frac{l}{h}$$



Tijelo težine G može se pod djelovanjem tereta Q, gibati po žici AB prema slici. Treba odrediti kut β i reakciju N za slučaj ravnoteže.

Promatrati slučajeve:

a) $\alpha = 0$

b) $\alpha = 90^{\circ}$

$$\Sigma x = 0 \qquad G\sin\alpha - Q\cos\beta = 0$$

$$\cos\beta = \frac{G}{Q}\sin\alpha$$

$$\Sigma y = 0 \qquad Q\sin\beta - G\cos\alpha + N = 0$$

$$N = G\cos\alpha - Q\sin\beta = G\cos\alpha - Q\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

$$N = G\cos\alpha - \sqrt{Q^2 - G^2\sin^2\alpha}$$

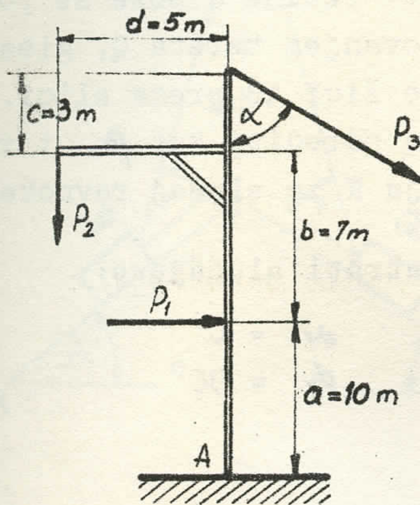
a) $\alpha = 0 \qquad \cos\beta = 0 \rightarrow \beta = 90^{\circ}$

$$N = G - \sqrt{Q^2} = G - Q$$

b) $\alpha = 90^{\circ} \qquad \cos\beta = \frac{G}{Q} \rightarrow \beta = \arccos\frac{G}{Q}$

$$N = \sqrt{Q^2 - G^2}$$

4. ZADATAK



Odredite grafički i analitički veličinu statičkog momenta rezultante zadanih sila P_1, P_2, P_3 koje djeluju na krutu figuru prema slici, ako je poznato:

P_1 = 1o kN P_3 = 3o kN

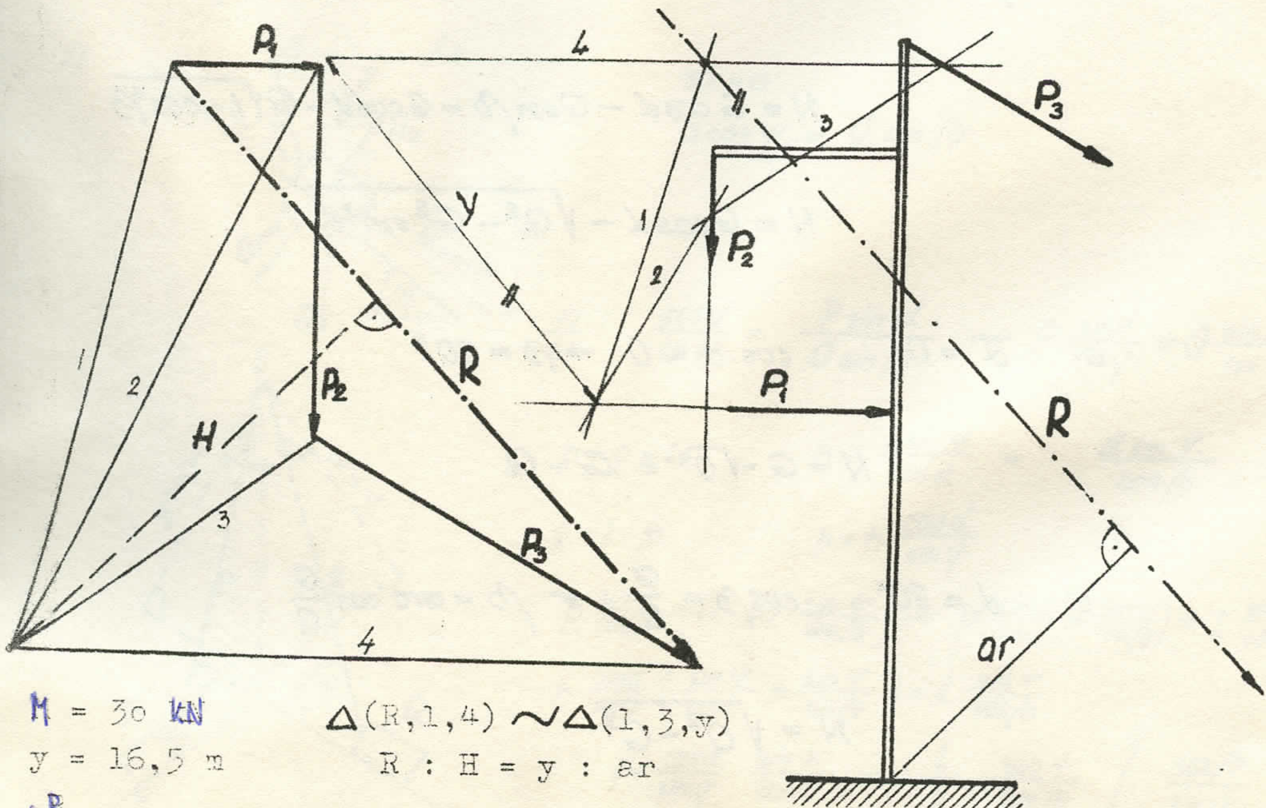
P_2 = 25 kN α = 60°

$$M_A^R = \sum M_A^{Pi} = P_1 . a - P_2 . d + P_3 (a+b+c) \sin \alpha$$

$$= 1o . 1o - 25 . 5 + 3o\ (1o+7+3) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1oo - 126 + 519 = 494 \text{ kN m}$$

1 cm ≙ 5 kN 1 cm ≙ 2 m



M = 3o kN

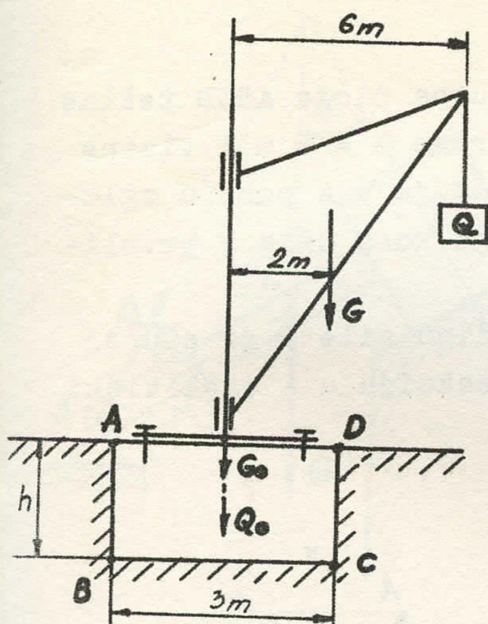
y = 16,5 m

$\Delta(R,1,4) \sim \Delta(1,3,y)$

R : H = y : ar

M_O^R = R.ar=H.y=3o.16,5 = 495 kN m

5. ZADATAK



Rotaciona dizalica prema slici ima nosivost 4.10^4 N. Treba da ima koeficijent sigurnosti $\xi = 2,5$. Temelj je kvadratnog presjeka sa stranicama duljine 3 m.

Kolika mora biti visina temelja, ako je zadana njegova specifična težina $\gamma = 1,6 \cdot 10^4$ N/m^3

Zadano:

Q = 4o ooo N (težina tereta)

G = 28 ooo N (težina dizalice)

G_o = 6ooo N (vlastita težina rotac.ploče)

Q_o = ? - težina temelja

Rješenje:

Cijeli sistem (dizalica i temelj) može se prema slici prevrnuti oko brida kroz C.

Shematski dizalicu i fundament možemo prikazati kao polugu.

Obzirom na C imamo:

$$M_p = Q \cdot 4,5 + G \cdot 0,5 \quad \text{Nm}$$

$$M_s = (G_o + Q_o) \cdot 1,5 \quad \text{Nm}$$

Kako je $\xi = 2,5 = \dfrac{M_s}{M_p}$ imamo:

$$(Q \cdot 4,5 + G \cdot 0,5) \cdot 2,5 = (G_o + Q_o) \cdot 1,5$$

$$(40\,000 \cdot 4,5 + 28000 \cdot 0,5) \cdot 2,5 = 4000 \cdot 1,5 + Q_o \cdot 1,5$$

$$(180000 + 1400) \cdot 2,5 = 9000 + 1,5\, Q_o$$

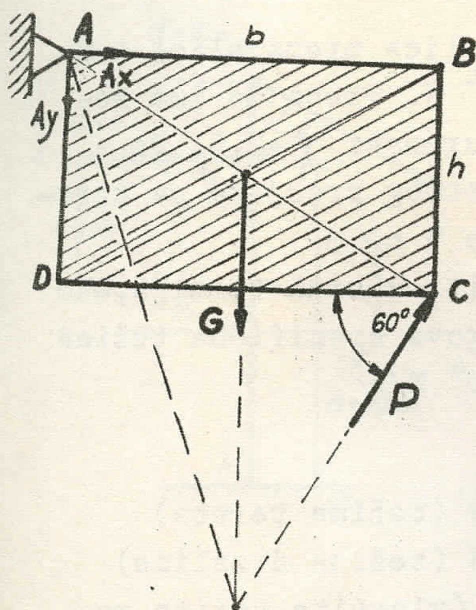
$$476000 = 1,5\; Q_o$$

$$Q_o = \frac{476000}{1,5} = 317\,500 \text{ N}$$

$$Q_o = 3 \cdot 3 \cdot h \cdot \gamma$$

$$h = \frac{Q_o}{9\gamma} = \frac{317500}{9 \cdot 16000} = \underline{2,20 \text{ m}}$$

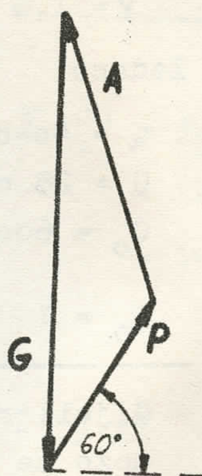
6. ZADATAK

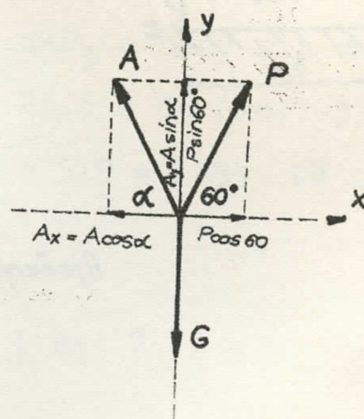


Homogena pravokutna ploča ABCD težine G = 15ooo N, širine b = 5 m i visine h = 3 m, obješena je u A pomoću zgloba, a u C djeluje kosa sila P pr.slici.

Treba naći veličinu sile P za slučaj ravnoteže, te reakciju u A analitički i grafički.

Grafički:





Analitički: $\Sigma x = -A_x + P_{cos}\ 60^o = 0$

$$\Sigma y = A_y - G + P_{sin}\ 6o^o = 0$$

$$\Sigma MA = G \cdot \frac{b}{2} - P_{cos}\ 6o \cdot h - P_{sin}\ 6o^o \cdot b = 0$$

$$P = G \cdot \frac{b}{2}\ \frac{1}{h\cos 60^o + b\sin 60^o} = 15ooo \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot o,5 + 5 \cdot o,866}$$

$$P = 375oo\ \frac{1}{1,5+4,35} = \frac{375oo}{5,85} = 642o\ N$$

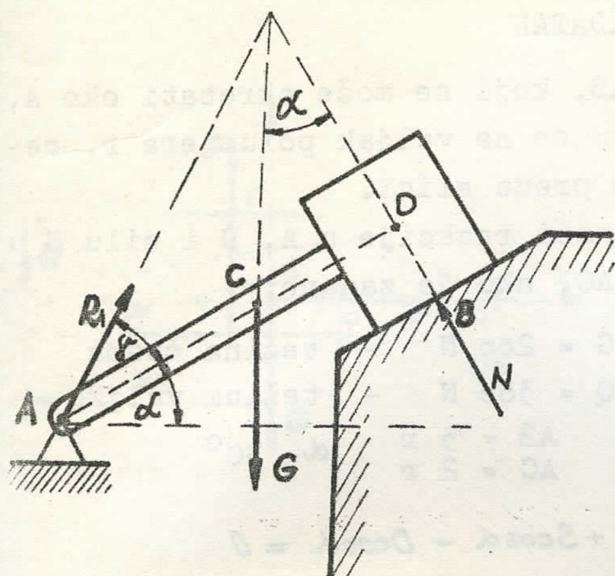
$$A_x = +P\cos 60^o\ +642o \cdot o,5 = +321o\ N$$

$$A_y = -P\sin 60^o + G = -642o \cdot o,866 + 15ooo$$

$$A_y = +\ 944o\ N$$

$$tg\,\alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{+944o}{+321o} = 2,94 \rightarrow \alpha = 71^o15'$$

7. ZADATAK

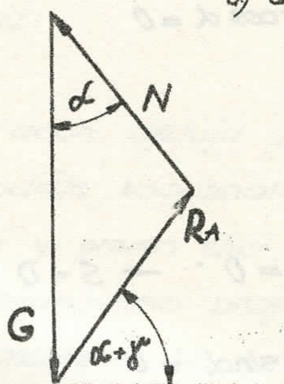


Treba odrediti reakcije u točkama A i B čekića težine G = 10000 N. Hvatište sile G leži na 3/4 dužine čekića od A, a nagib ručice čekića je $\alpha = 30^\circ$. $\overline{AC} = \frac{3}{4}$ $\overline{AD} = \frac{3}{4}$

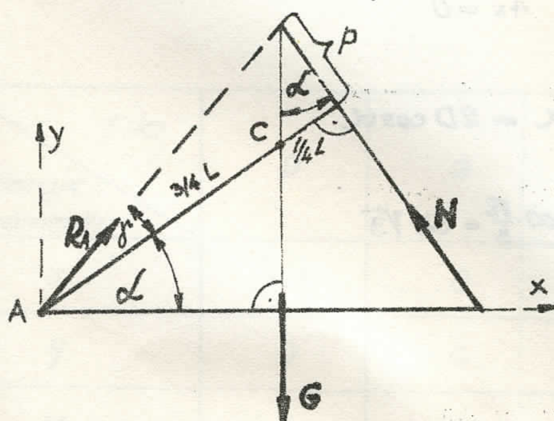
Odredite reakcije u A i B:

a) grafički
b) analitički

a) Grafički:



b.) Analitički:



$\frac{L}{4} : p = tg\alpha \rightarrow p = \frac{L}{4}\,ctg\alpha$

$tg\gamma = \frac{\frac{L}{4}\,ctg\alpha}{L} = \frac{ctg\alpha}{4}$

$tg\gamma = \frac{1{,}732}{4} = 0{,}432$

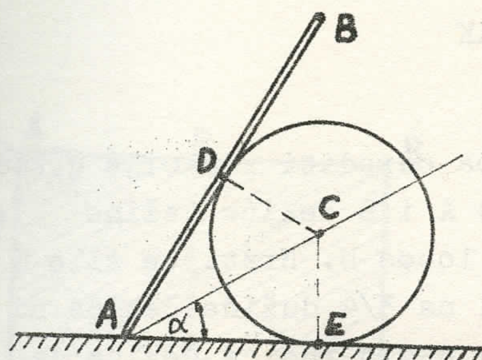
$\gamma \approx 23{,}4^\circ = 23^\circ\,24'$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow G \cdot \frac{3}{4} L \cos\alpha - N \cdot L = 0$

$N = \frac{3}{4}\cos\alpha \cdot G = 0{,}75 \cdot 0{,}886 \cdot 10000 = 6500\ N$

$\Sigma X = 0 \rightarrow R_A \cos(\alpha + \gamma) - N \sin\alpha = 0$

$R_A = N \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\gamma)} = 6500\,\frac{\sin 30^\circ}{\cos 53^\circ 24'} = 6500\,\frac{0{,}5}{0{,}595} = 5450\ N$

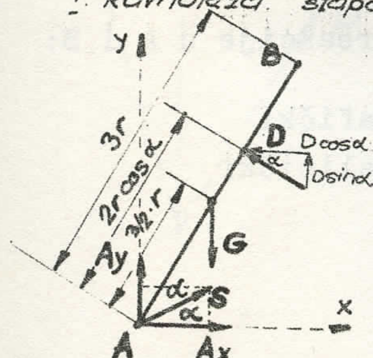


3. ZADATAK

Štap AB, koji se može okretati oko A, oslanja se na valjak polumjera r, rezan je prema slici.
Treba naći reakcije u A, D i silu S u užeta AC, ako je zadano:

G = 2oo N - težina štapa
Q = 3oo N - težina valjka
dužina AB = 3 r α = 30°
AC = 2 r

I. Ravnoteža štapa: A-B

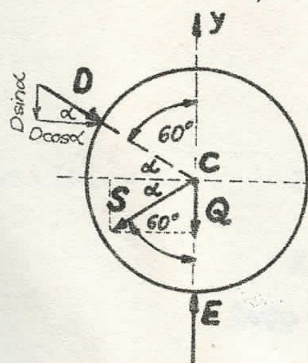


1.) $\sum X \equiv A_x + S\cos\alpha - D\cos\alpha = 0$

2.) $\sum Y \equiv A_y - G + D\sin\alpha + S\sin\alpha = 0$

3.) $\sum M_A \equiv G\cdot\frac{3}{2} r\sin\alpha - D 2r\cos\alpha = 0$

II. Ravnoteža valjka:



4.) $\sum X \equiv -S\cos\alpha + D\cdot\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad S = D$

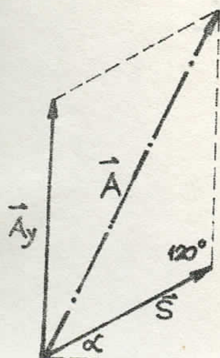
5.) $\sum Y = E - Q - S\sin\alpha - D\sin\alpha = 0$

4.) u 1.) $\rightarrow \quad A_x = 0$

Iz 3.) $\rightarrow \quad G\,\frac{3}{2}\sin\alpha = 2D\cos\alpha$

$$D = \frac{3}{4} G\cdot tg\alpha = \frac{3}{4}\cdot 200\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3}$$

$$D = S = 86{,}6 \ N$$



Iz. 5.) $\rightarrow E = Q + 2D\sin\alpha = 386{,}6 \ N$

Iz. 2.) $\rightarrow A_y = G - 2D\sin\alpha = 113{,}4 \ N$

Reakcija u zglobu A je jednaka vektorskoj sumi A_y i S = D

$\vec{A} = \vec{A}_y = \vec{S}$

$$A^2 = A_y^{\ 2} + S^2 - 2A_y \cdot S\cos 120^\circ$$

$$A = 173{,}72 \ N$$

9. ZADATAK

Pri horizontalnom letu aviona s v = konst. djeluju sile prema slici (slučaj dinamičke ravnoteže)

Zadano je: G = 81ooo N

P = 26oo N

a = 7 m ; b = 6o mm; c = 1oo mm.

Analitički treba odrediti silu uzgona A, otpor zraka W i pritisak Q na repne površine.

Rješenje:

1.) Na avion djeluju zadane sile G i P i nepoznate sile A, W i Q. Za ishodište koordinatnog sistema uzimamo težište S i biramo osi x i y prema slici.

2.) Izračunavamo projekcije svih sila na izabrane koordinatne osi, kao i momente tih svih sila s obzirom na S. Rezultati su pokazani u tablici:

Sila / Projekcije momenti	P	G	A	W	Q
x	+P	0	0	-W	0
y	0	-G	+A	0	-Q
M_S	0	0	$-A\cdot c$	$-W\cdot b$	$+Q\cdot a$

Jednadbe ravnoteže:

1.) $\sum x=0 \rightarrow P - W = 0 \longrightarrow W = P$

2.) $\sum y=0 \rightarrow -G + A - Q = 0 \longrightarrow A = G+Q$

3.) $\sum M_S=0 \rightarrow -A\cdot c - W\cdot b + Q\cdot a = 0$

Dobivene vrijednosti za W i A uvrštavamo u 3.), pa imamo

$$-(G+Q)\cdot c - P\cdot b + Q\cdot a = 0$$

$$-G\cdot c - P\cdot b + Q\,(a-c) = 0$$

odatle

$$Q = \frac{G\cdot c + P\cdot b}{a-c}$$

Prema tome bit će:

$$A = G + Q = \frac{G\cdot a - G\cdot c + G\cdot c + P\cdot b}{a-c} = \frac{G\cdot a + P\cdot b}{a-c}$$

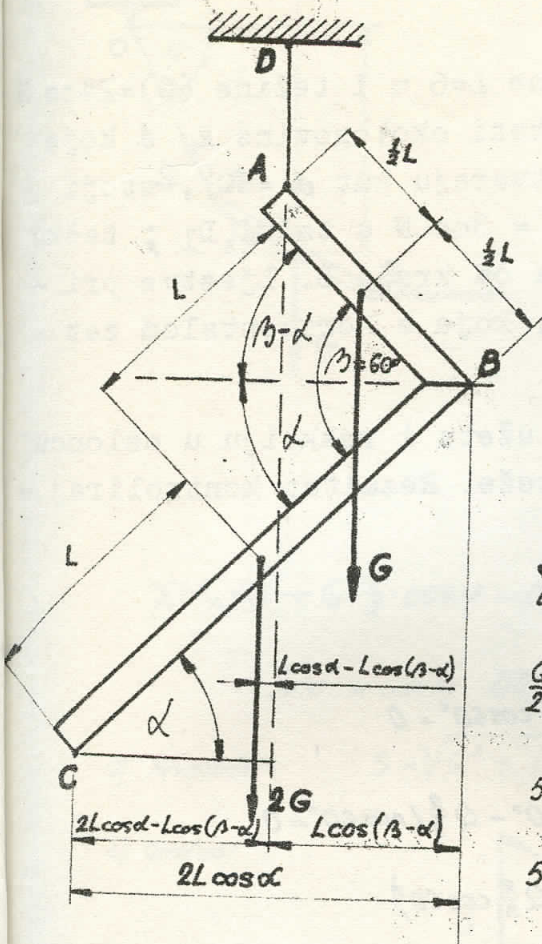
Uvrštavanjem zadanih numeričkih vrijednosti dobivamo

$$W = P = 26000\,N$$

$$Q = \frac{G\cdot c + P\cdot b}{a-c} = \frac{81000\cdot 100 + 26000\cdot 60}{7000-100} = 1400\,N$$

$$A = \frac{G\cdot a + P\cdot b}{a-c} = \frac{81000\cdot 7000 + 26000\cdot 60}{7000-100} = 82400\,N$$

10. ZADATAK



Dva homogena štapa AB i BC jednakih presjeka, od kojih je BC dvaput duži od AB, sastavljeni su pod kutem $\beta = 60^{o}$ u jednu cjelinu ABC. Kraj A je obješen o konac AB. Treba odrediti kut α, koji krak BC zatvara s horizontalom (dimenzije štapa zanemarujemo)

Rješenje:

$$\sum M_A \equiv G\cdot\frac{L}{2}\cos(\beta-\alpha) - 2G[L\cos\alpha - L\cos(\beta-\alpha)] = 0$$

$$\frac{G}{2}L\cos(\beta-\alpha) - 2GL\cos\alpha + 2GL\cos(\beta-\alpha) = 0$$

$$5\cos(\beta-\alpha) - 4\cos\alpha = 0$$

$$5\cos\beta\cos\alpha + 5\sin\beta\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$$

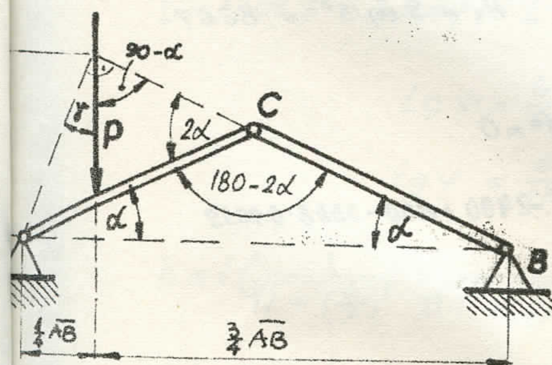
$$\cos\beta = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5}{2}\cos\alpha + \frac{5}{2}\sqrt{3}\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{3}\sin\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha \rightarrow tg\alpha = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

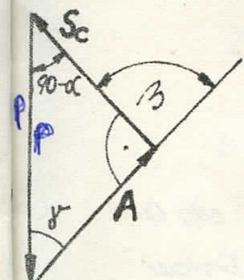
$$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

11. ZADATAK



Treba odrediti reakcije u zglobovima štapnog sistema zadanog prema slici, ako je lijevi kraj opterećen u sredini vertikalnom silom $P = 20.10^3$ N a štapovi nagnuti pod kutem $\alpha = 30^{o}$ (štapovi su jednake du - žine, a njihove težine ne uzimamo u obzir).

Rješenje:



$$\frac{\overline{AB}}{4h} = tg\,\gamma \qquad \frac{3}{4}\,\frac{\overline{AB}}{h} = ctg\,\alpha$$

$$h = \frac{\overline{AB}}{4\,tg\,\gamma} \qquad h = \frac{3}{4}\,\frac{AB}{ctg\,\alpha}$$

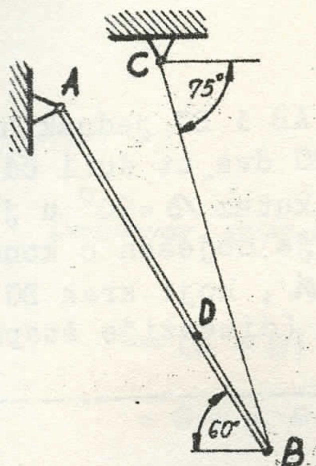
$$\frac{\overline{AB}}{4\,tg\,\gamma} = \frac{3}{4}\,\frac{\overline{AB}}{4\,ctg\,\alpha} \rightarrow ctg\,\gamma = 3\,tg\,\alpha = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \gamma = 30^{o} \rightarrow \beta = 90^{o}$$

$S_C = P\sin\alpha = 0,5\,.\,P = 0,5.20000 = 10\ 000$ N

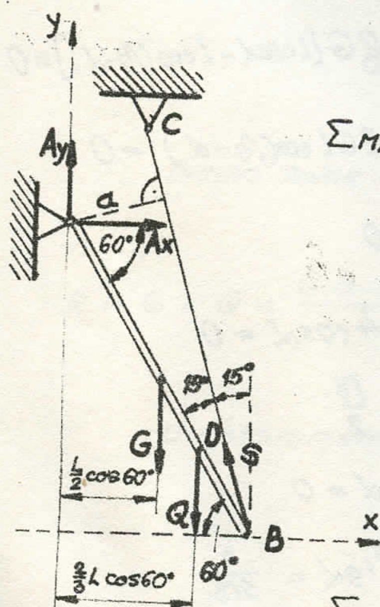
$A = P\cos\alpha = 0,866.P = 0,866.20000 = 17\ 320$ N

12. ZADATAK



Na ljestvama dužine L=6 m i težine (G)=24oo N koje se mogu okretati oko osovine A, a koje s horizontalom zatvaraju kut α =60°, stoji čovjek težine $|Q|$ = 8oo N u tački D_1 ; tačka je za 2 m udaljena od kraja B. Ljestve pridržava u B uže BC, koje s horizontalom zatvara kut od 75°.

Odredite silu S u užetu i reakciju u osloncu A za slučaj ravnoteže. Rezultat kontrolirajte grafički.



$$\sum M_A = 0 \quad S\cdot a - G\frac{L}{2}\cos 60° - Q\frac{2L}{3}\cos 60° = 0$$

$$a = L\sin 15°$$

$$S\cdot L\sin 15° - G\frac{L}{2}\cos 60° - Q\frac{2}{3}L\cos 60° = 0$$

$$S = \frac{1}{\sin 15°}\left(\frac{G}{2}\cos 60° + Q\frac{2}{3}\cos 60°\right)$$

$$S = \frac{1}{0{,}2588}\left(\frac{2400}{2}\cdot\frac{1}{2} + 800\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$S = 3348\ \mathrm{N}$$

$$\sum x = 0 \quad A_x - S\sin 15° = 0 \qquad A_x = S\sin 15° = 8667$$

$$\sum y = 0 \quad A_y - G - Q + S\sin 15° = 0$$

$$A_y = G + Q - S\sin 15° = 2400 + 800 - 3348\cdot 0{,}9659$$

$$A_y = -344\ \mathrm{N}$$

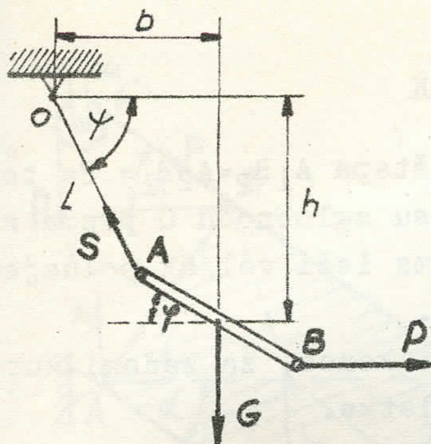
$$tg\,\psi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-344}{8667} = -0{,}039705$$

$$\psi = 2°16' \sim 2{,}2°$$

$$\varphi = 87°44' \sim 87{,}8°$$

Grafički:

Pomoću verižnog poligona nađemo položaj rezultante sila Q+G. Kroz sjecište rezultante Q+G i pravca djelovanja sile S (uže) prolazi reakcija A.



13. ZADATAK

Homogeni štap AB dužine L=1o cm i težine G=o,2 N obješen je u A pomoću užeta OA dužine L, dok u B djeluje horizontalna sila P = o,3 N. Naći grafički i analitički veličinu sile u užetu OA, nagib φ štapa AB i položaj njegovog težišta u općem slučaju, odnosno i za zadanu vrijednost sile P.

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow G\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos\varphi - P\cdot L\cdot\sin\varphi = 0 \longrightarrow tg\,\varphi = \frac{G}{2P} = \frac{0{,}20}{2\cdot 0{,}3} = \frac{1}{3}$$

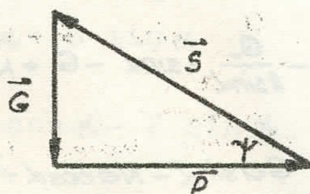
$$\varphi = 18{,}4^\circ$$

Sila u užetu $\overline{OA}$

a) Analitički: $S = \sqrt{G^2 + P^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}36\ N$

b) Grafički:

$1cm \hat{=} 0{,}1\ N$



$S = 3{,}6\ cm = 0{,}36\ N$

Položaj težišta štapa $\overline{AB}$:

$$b = L\cos\psi + \frac{L}{2}\cos\varphi = L\left(\cos\psi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)$$

$$tg\,\psi = \frac{G}{P} \qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{G^2}{P^2}}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{G}{2P} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{G}{2P}\right)^2}}$$

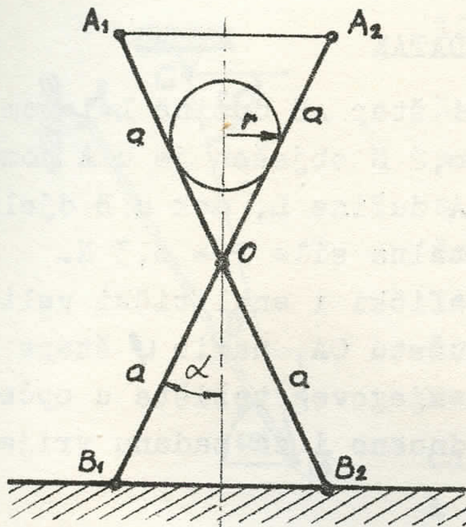
$$b = L\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{G}{P}\right)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{G}{2P}\right)^2}}\right)$$

$$h = L\sin\psi + \frac{L}{2}\sin\varphi = L\left(\sin\psi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = L\cdot\frac{G}{P}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{G}{P}\right)^2}} + \frac{1}{4\sqrt{1+\left(\frac{G}{2P}\right)^2}}\right)$$

Za zadani slučaj:

$$b = 10\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{30}{20}\right)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{20}{60}\right)}}\right) = 13{,}05\ cm$$

$$h = 10\,\frac{20}{30}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{20}{30}\right)^2}} + \frac{1}{4\sqrt{1+\left(\frac{20}{60}\right)^2}}\right) \equiv 7{,}15\ cm$$



14. ZADATAK

Dva jednaka štapa $A_1B_2=A_2B_1=2a$ težine G vezana su zglobno u O prema slici. Među njima leži valjak polumjera r i težine Q.

Nađi napetost konca, za zadani kut α. Podloga je glatka.

Ravnoteža valjka:

$$\Sigma Y=0$$

$$2R\sin\alpha - Q = 0 \quad\rightarrow\quad R=\frac{Q}{2\sin\alpha}$$

Ravnoteža štapa B_1A_2:

$$1.)\quad \Sigma X=0 \quad -S+\frac{Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha - N = 0$$

$$2.)\quad \Sigma Y=0 \quad -\frac{Q}{2\sin\alpha}\cdot\sin\alpha - G + N_1 = 0$$

$$3.)\quad \Sigma M_{B_1}=0 \quad Ga\sin\alpha - Na\cos\alpha + \frac{Q}{2\sin\alpha}\left(a+\frac{r}{tg\alpha}\right) - S\cdot 2a\cos\alpha = 0$$

Iz 1.) $\rightarrow N=\left(\frac{Q}{2}ctg\alpha - S\right)$

2.) $\rightarrow N_1=\frac{Q}{2}+G$

supstituirati u 3.)

$$G\cdot a\cdot\sin\alpha + S\cdot a\cdot\cos\alpha - \frac{Q}{2}a\cos\alpha\, ctg\alpha + \frac{Q\cdot a}{2\sin\alpha} + \frac{Q\cdot r}{2\sin\alpha\, tg\alpha} - S\cdot 2a\cos\alpha = 0$$

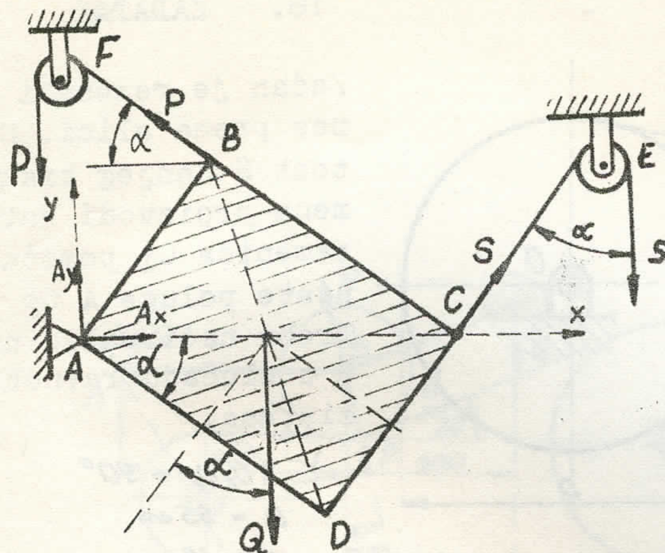
$$Sa\cos\alpha = Ga\sin\alpha - \frac{Q}{2}a\cos\alpha\, ctg\alpha + \frac{Q\cdot a}{2\sin\alpha} + \frac{Q\cdot r}{2\sin\alpha\, tg\alpha}$$

podijeljeno sve sa: $a\cdot\cos\alpha$

$$S = G\,tg\alpha - \frac{Q}{2}ctg\alpha + \frac{Q}{2}\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{Q}{2}\frac{r}{a\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

uređeno:

$$S = \frac{Qr}{2a\sin^2\alpha} + \left(G+\frac{Q}{2}\right)tg\alpha$$



15. ZADATAK

Homogena pravokutna ploča ABCD težine Q=2ooo N, može se okretati u vertikalnoj ravnini oko nepomičnog zgloba A, a održava se u zadanom ravnotežnom položaju s pomoću dva užeta prema slici.

Treba odrediti veličinu sile P i komponente reakcije u A, ako je zadano:

S=5oo N, AD=4 m, AB=3 m

stranica AD zatvara s horizontalom kut α , čija je $\cos\alpha = 4/5$.

$$\sin = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\Sigma M_A = P.\overline{AB} + S.\overline{AD} - Q\ .\ \frac{\overline{AD}}{2}\cos\alpha - Q\ \frac{\overline{AB}}{2}\sin\alpha = 0$$

$$P = \left[Q\left(\frac{\overline{AB}}{2}\sin\alpha + \frac{\overline{AD}}{2}\cos\alpha\right) - S\ \overline{AD}\right]\frac{1}{\overline{AB}} = 1000\,N$$

$$\Sigma x = Ax - P\cos\alpha + S\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma x = Ay + P\sin\alpha - Q + S\cos\alpha = 0$$

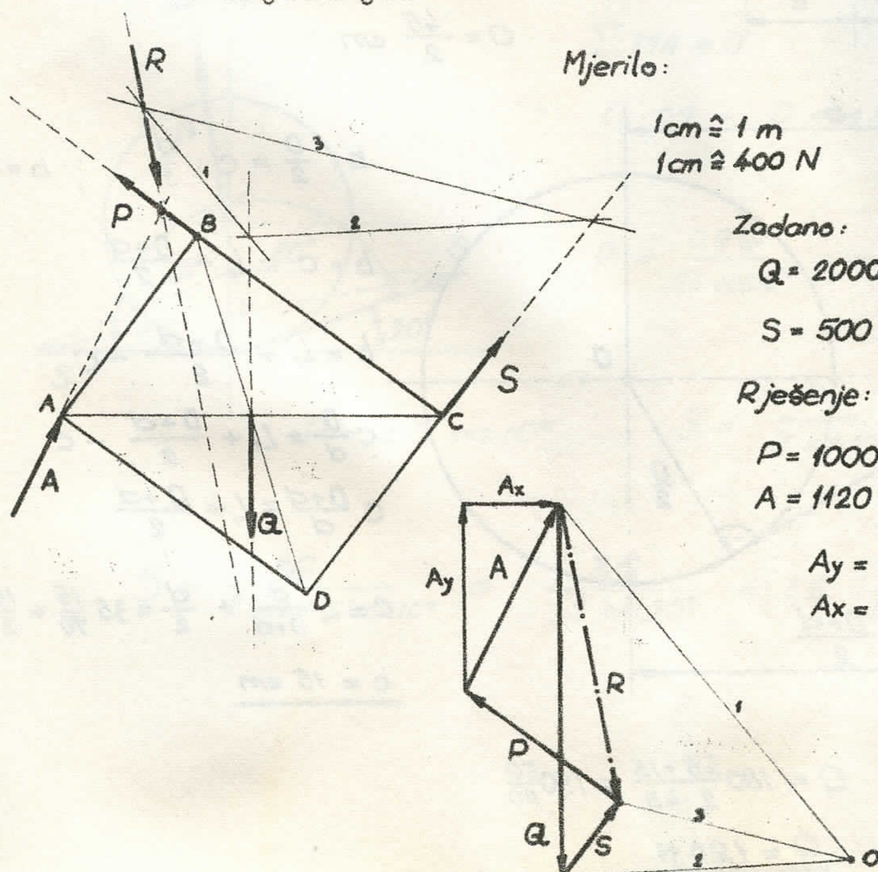
$$Ax = P\cos\alpha - S\sin\alpha$$

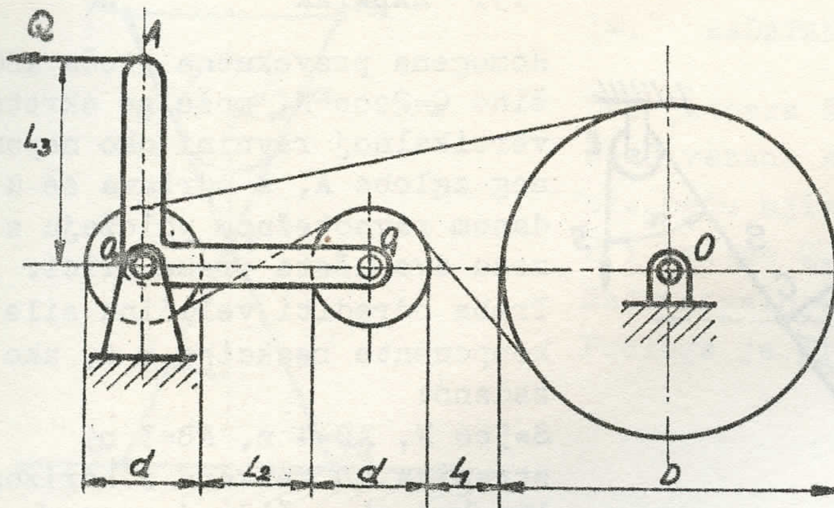
$$\underline{Ax = 5oo\ N}$$

$$Ay = Q - S\cos\alpha - P\sin\alpha$$

$$Ay = 1ooo\ N$$

Grafičko riješenje:

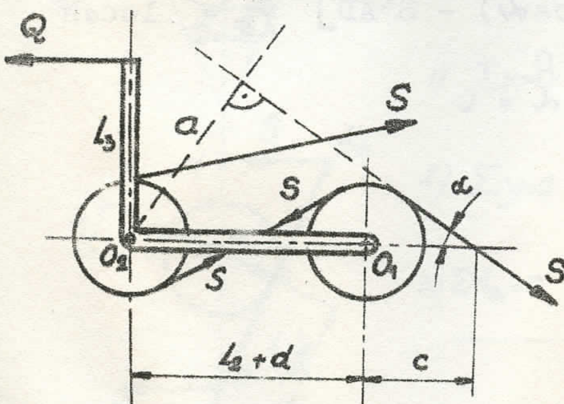




16. ZADATAK

Zadan je remenski prijenos prema slici. Napetost S donjeg traka remena proizvodi zatezna remenica O_1 pomoću kolјenaste poluge A O_2 O_1. Treba naći veličinu sile Q u slučaju ravnoteže sistema.

$\measuredangle A O_2 O_1 = 90°$
$D = 55 cm$
$d = 15 cm$
$L_1 = 35 cm$
$L_2 = 15 cm$
$L_3 = 45 cm$
$S = 180 N$



$$\Sigma M_{O_2} = 0 \rightarrow Q \cdot L_3 - S \cdot \frac{d}{2} - S \cdot a = 0$$

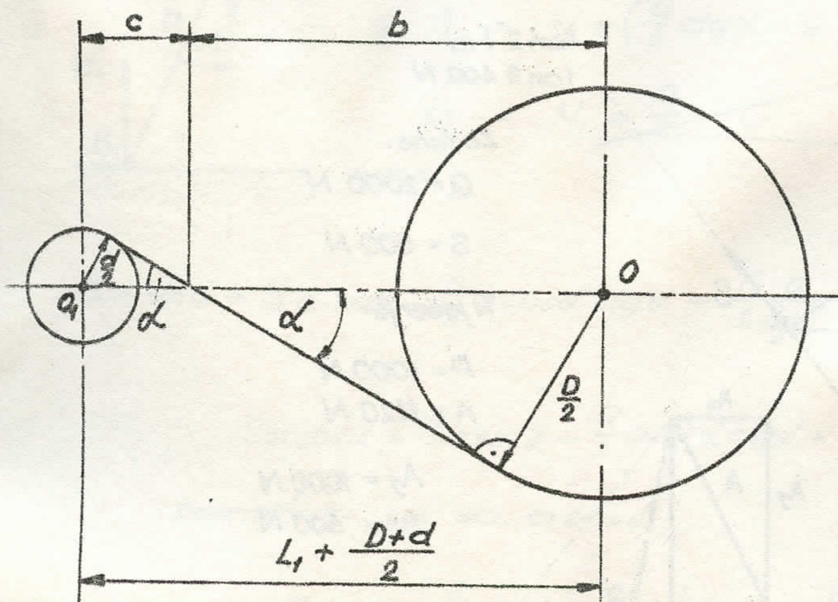
$$Q = S \cdot \frac{a + \frac{d}{2}}{L_3}$$

$$a = (c + L_2 + d) \sin\alpha \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{d}{2c}$$

$$a = \frac{d}{2}\left(1 + \frac{L_2 + d}{c}\right)$$

$$a = \frac{15}{2}\left(1 + \frac{15+15}{15}\right) = \frac{45}{2}$$

$$a = \frac{45}{2} \ cm$$



$$b : \frac{D}{2} = c : \frac{d}{2} \quad ; \quad b = c\frac{D}{d}$$

$$b + c = L_1 + \frac{D+d}{2}$$

$$b = L_1 + \frac{D+d}{2} - c$$

$$c\frac{D}{d} = L_1 + \frac{D+d}{2} - c$$

$$c\frac{D+d}{d} = L_1 + \frac{D+d}{2}$$

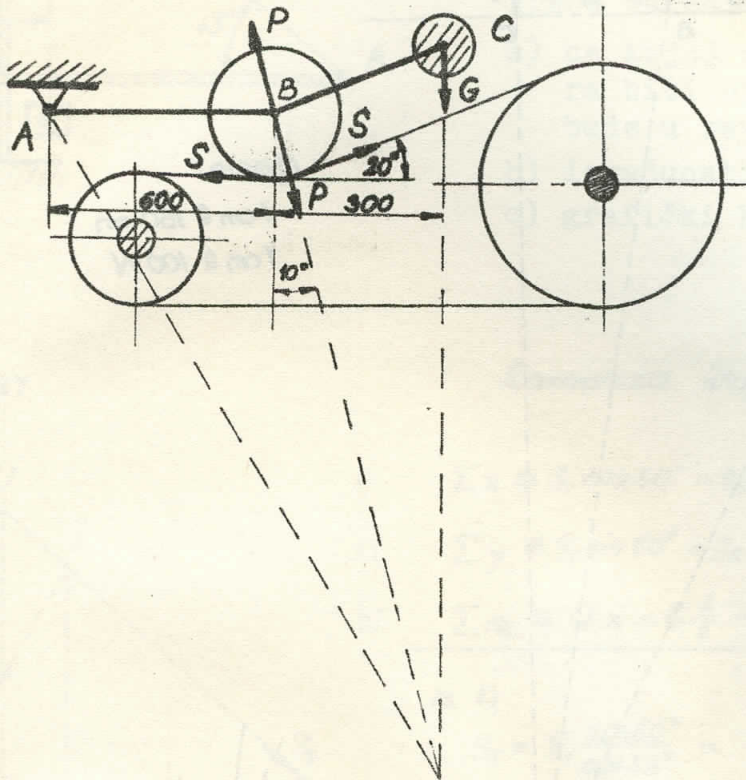
$$c = L_1\frac{d}{D+d} + \frac{d}{2} = 35\frac{15}{70} + \frac{15}{2} = 15$$

$$c = 15 \ cm$$

$$Q = 180\frac{45+15}{2 \cdot 45} = 180\frac{60}{90}$$

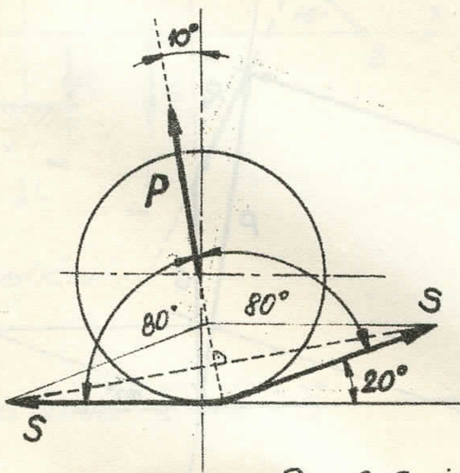
$$Q = 120 \ N$$

17. ZADATAK



Zadan je mehanizam zatezne remenice prema slici. Napetost S gornjeg kraka remena proizvodi zatezna remenica pomoću koljenaste poluge ABC. Na savijenom kraku poluge nalazi se uteg težine G = 300 N

Treba odrediti napetost S remena.



$$\sum M_A = 0$$

$$G \cdot 0{,}9 - P \cdot \cos 10° \cdot 0{,}6 = 0$$

$$P = \frac{0{,}9\,G}{0{,}6 \cdot \cos 10°} = \frac{3\,G}{2\cos 10°}$$

$$P = 2\,S \sin 10° \qquad S = \frac{P}{2\sin 10°}$$

$$S = \frac{3G}{2 \cdot 2 \sin 10° \cos 10°} = \frac{3G}{2\sin 20°} = 1{,}5 \cdot \frac{300}{0{,}341} = \mathbf{1320\ N}$$

Grafičko riješenje

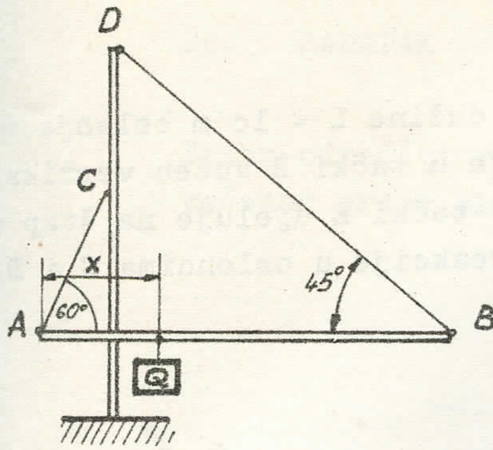
Mjerilo:

1 cm ≙ 150 cm

1 cm ≙ 100 N

G = 300 N $\quad$ R_A = 160 N

P = 450 N $\quad$ S ≅ 1300 N



18. ZADATAK

Homogeni horizontalni štap AB težine G = loo N i dužine L=5 m obješen je na svojim krajevima prema slici. Treba odrediti:

a) na kojoj udaljenosti od tačke A mora biti obješen teret Q=60 N da štap bude u ravnoteži

b) izračunati sile u AC i BD

c) grafički kontrolirati

Ravnoteža štapa:

1.) $\sum x \equiv S_1 \cos 60° - S_2 \cos 45° = 0$

2.) $\sum y \equiv S_1 \sin 60° + S_2 \sin 45° - G - Q = 0$

3.) $\sum M_A \equiv Q \cdot x + G \cdot \frac{L}{2} - S_2 \sin 45 \cdot L = 0$

iz 1.)

$$S_2 = S_1 \frac{\cos 60°}{\cos 45°} = \frac{S_1}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow u\ 2.)$$

$$S_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{S_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\ 2} = G + Q$$

$$S_1 = \frac{2(G+Q)}{\sqrt{3}+1} = \frac{320}{2{,}73} = \mathbf{117\,N}$$

$$S_2 = \frac{117}{\sqrt{2}} = \mathbf{83\,N}$$

3.) $\rightarrow$

$$x = \frac{S_2 \sin 45° \cdot L - G \cdot \frac{L}{2}}{Q}$$

$$x = \frac{83 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 \cdot \frac{5}{2}}{60} = \frac{44}{60}$$

$$x = 0{,}735\ m$$

y, D, I, C, S_1, S_2, 60°, 45°, x, A, B, Q, G, x, $\frac{1}{2}L$

Grafički:

Rezultanta $\vec{R} = \vec{G} + \vec{Q}$

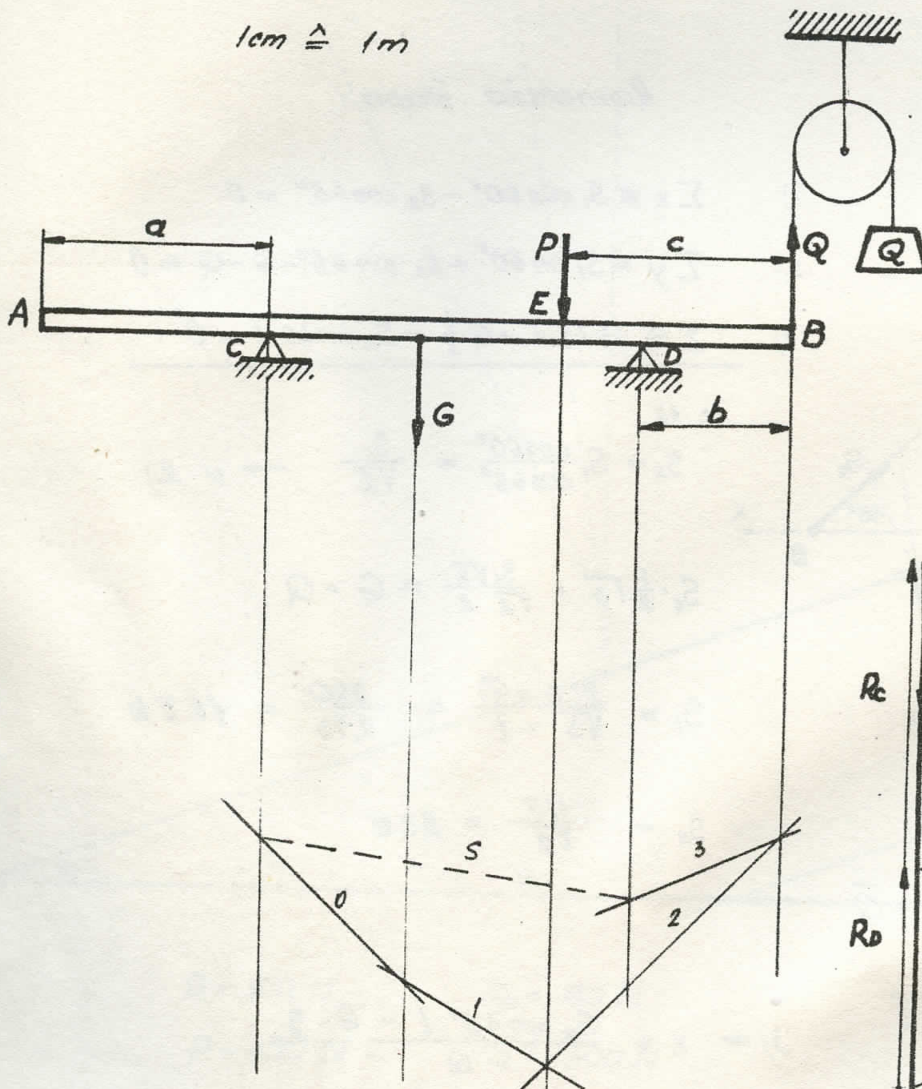
mora prolaziti kroz I

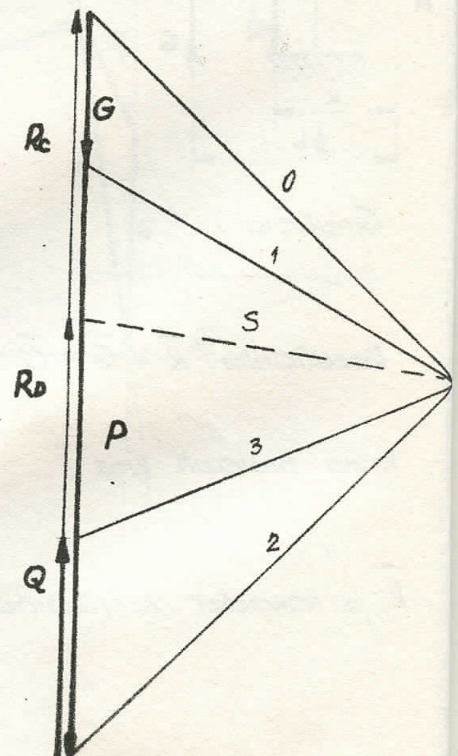
$\vec{R}$ je također vertikalna

19. ZADATAK

Homogeni štap AB težine G = 2ooo N i dužine L = lo m oslanja se na dva oslonca C i D. Desni kraj štapa je u tački B vučen vertikalno gore posredstvom tereta Q = 2ooo N. U tački E djeluje na štap vertikalno sila P = 8ooo N. Treba naći reakcije u osloncima C i D.

Zadano je: a = c = 3 m i
b = 2 m





$R_C = 4000 N$

$R_D = 3000 N$

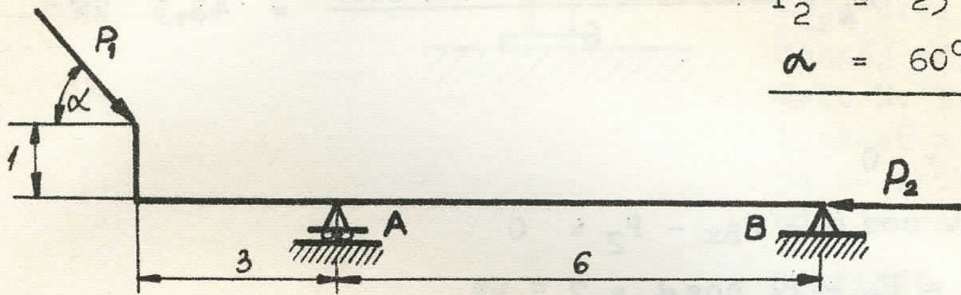
2o. ZADATAK

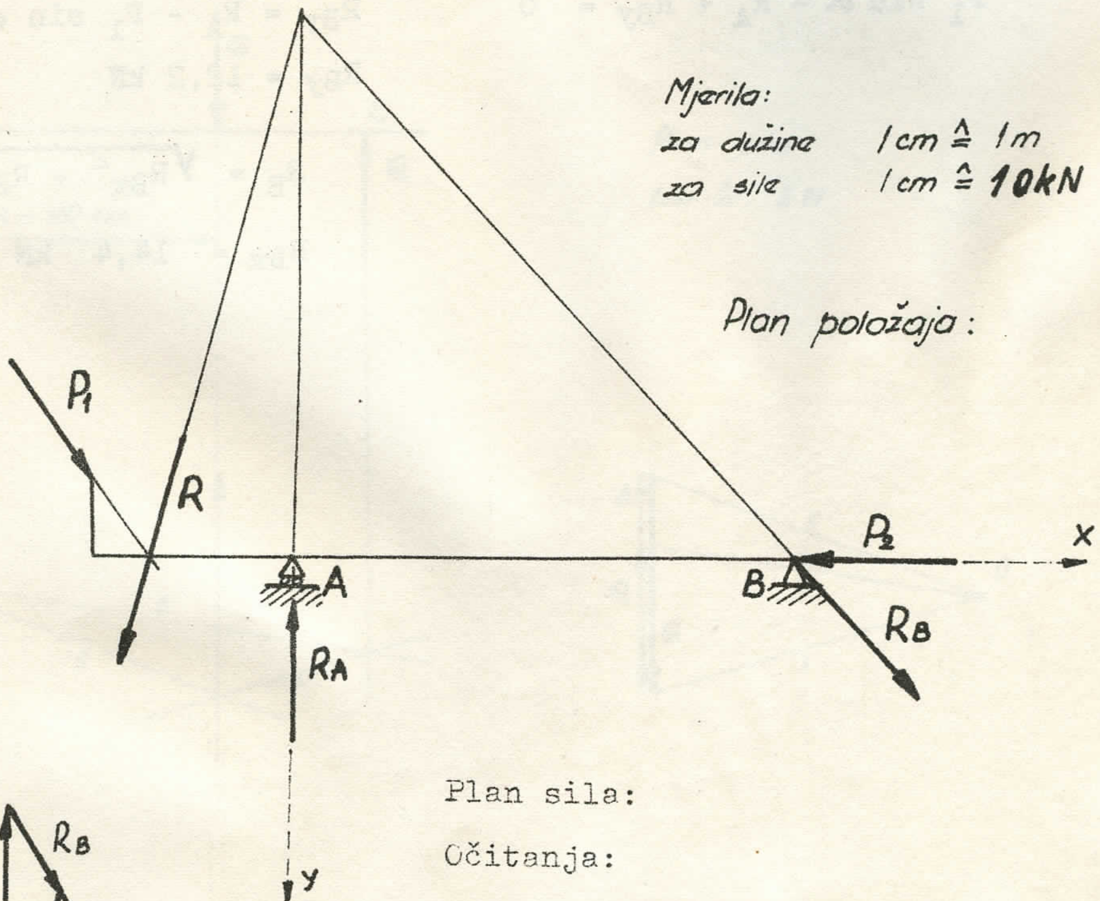
Treba odrediti reakcije u osloncima nosača zadanog i opterećenog prema slici.

$A = 35$ kN

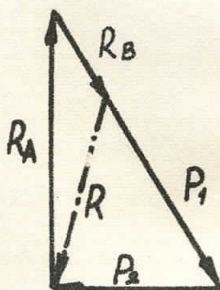
$P_2 = 25$ kN

$\alpha = 60°$.





Plan sila:



Očitanja:

$R_A = 42,5$ kN

$R_B = 14,5$ kN

Analitički:

$\Sigma M_B = 0$

$$P_1 \sin\alpha \cdot 9 - P_1 \cos\alpha \cdot 1 - R_A \cdot 6 = 0$$

$$R_A = \frac{P_1 \sin\alpha \cdot 9 - P_1 \cos\alpha}{6} = 42{,}5 \text{ kN}$$

$\Sigma x = 0$

$$P_1 \cdot \cos\alpha + R_{Bx} - P_2 = 0$$

$$R_{Bx} = P_2 - P_1 \cos\alpha = 7{,}5 \text{ kN}$$

$\Sigma y = 0$

$$P_1 \sin\alpha - R_A + R_{By} = 0$$

$$R_{By} = R_A - P_1 \sin\alpha$$

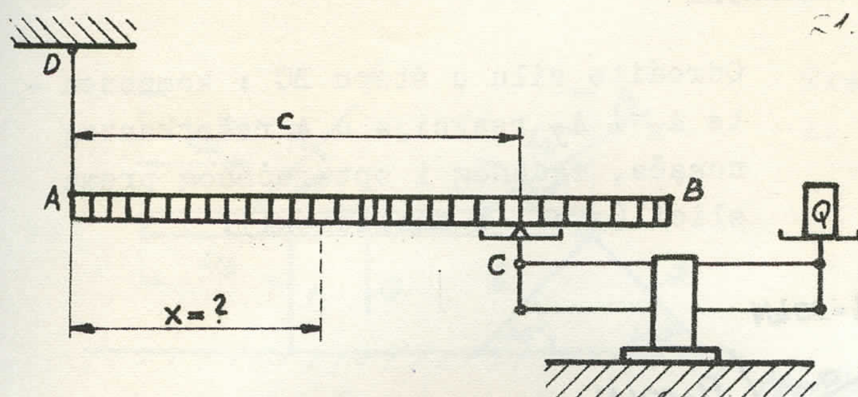
$$R_{By} = 12{,}2 \text{ kN}$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2}$$

$$R_{Bx} = 14{,}4 \text{ kN}$$

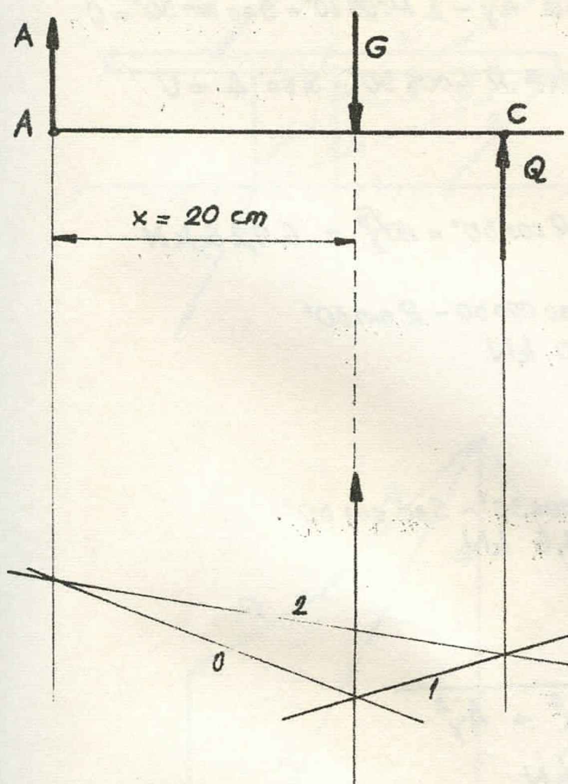
21. ZADATAK

Nehomogeni štap težine G=15 N obješen prema slici u A pomoću niti AD, oslanja se donjim krajem na vagu. On je u horizontalnom položaju. Težina utega koja drži ravnotežu na desnoj zdjelici je Q=lo N. Treba naći udaljenost x težišta štapa od tačke A, ako je udaljenost c = 3o cm.

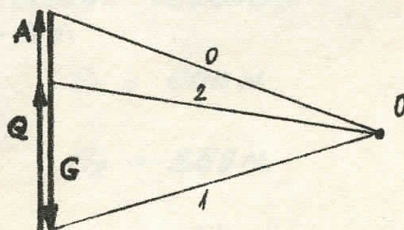


Grafički:

Plan položaja: 1cm ≙ 5cm

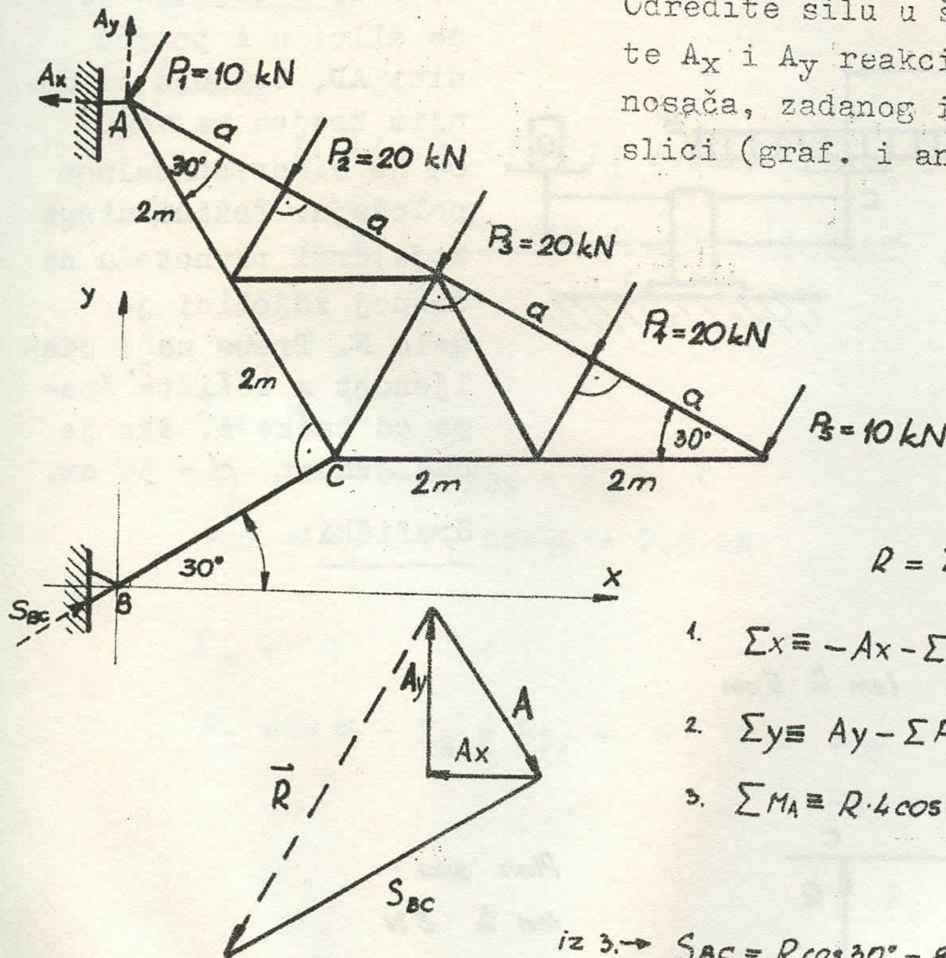


Plan sila: 1cm ≙ 5N



22. ZADATAK

Odredite silu u štapu BC : komponente A_x i A_y reakcija u A rešetkastog nosača, zadanog i opterećenog prema slici (graf. i analitički).



$R = \Sigma P = 80\,kN$

1. $\Sigma x \equiv -A_x - \Sigma P \sin 30° + S_{BC} \cos 30° = 0$

2. $\Sigma y \equiv A_y - \Sigma P \cos 30° + S_{BC} \sin 30° = 0$

3. $\Sigma M_A \equiv R \cdot 4 \cos 30° - S_{BC} \cdot 4 = 0$

iz 3. → $S_{BC} = R \cos 30° = 80 \frac{\sqrt{3}}{2} = 69{,}28\,kN$

$1\,cm \hat{=} 0{,}5\,m$

$1\,cm \hat{=} 1\,t$

iz 1. → $A_x = S_{BC} \cos 30 - R \sin 30°$

$A_x = 20\,kN$

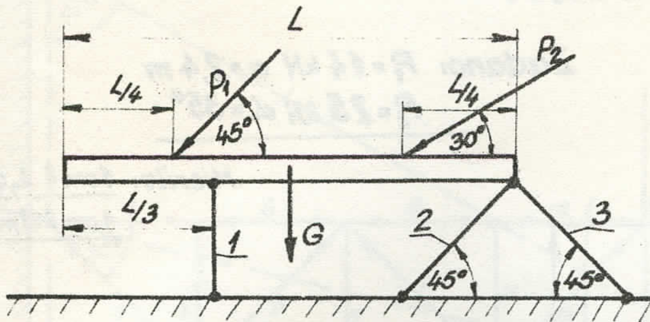
iz 2. → $A_y = R \cos 30° - S_{BC} \sin 30°$

$A_y = 34{,}6\,kN$

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$A \cong 40\,kN$

23. ZADATAK



Treba naći sile u štapcvima 1, 2 i 3 (po Culmannu)

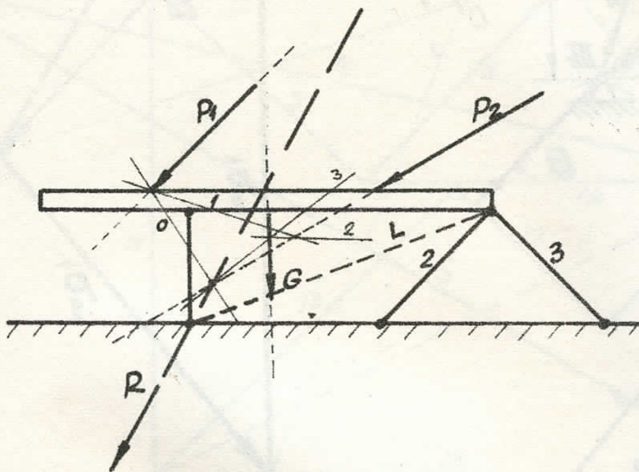
Mjerila za dužine 1cm ≙ 1m

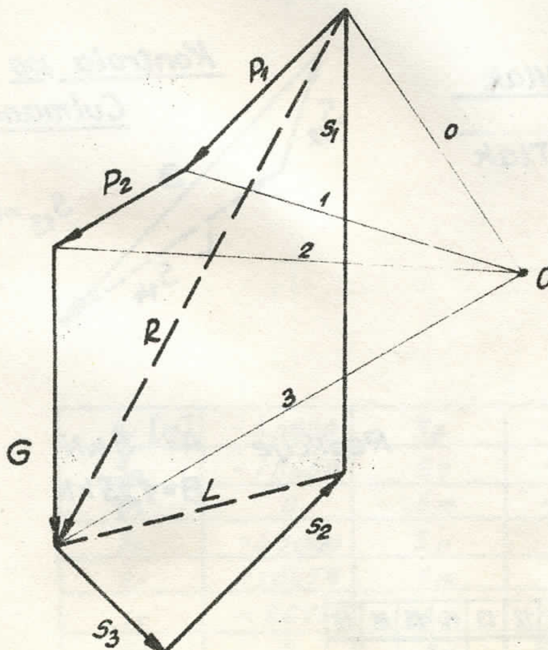
za sile 1cm ≙ 100N

P_1 = 300 N

P_2 = 200 N

G = 400 N





Očitani rezultati

S_1 = 600 N

S_2 = 350 N

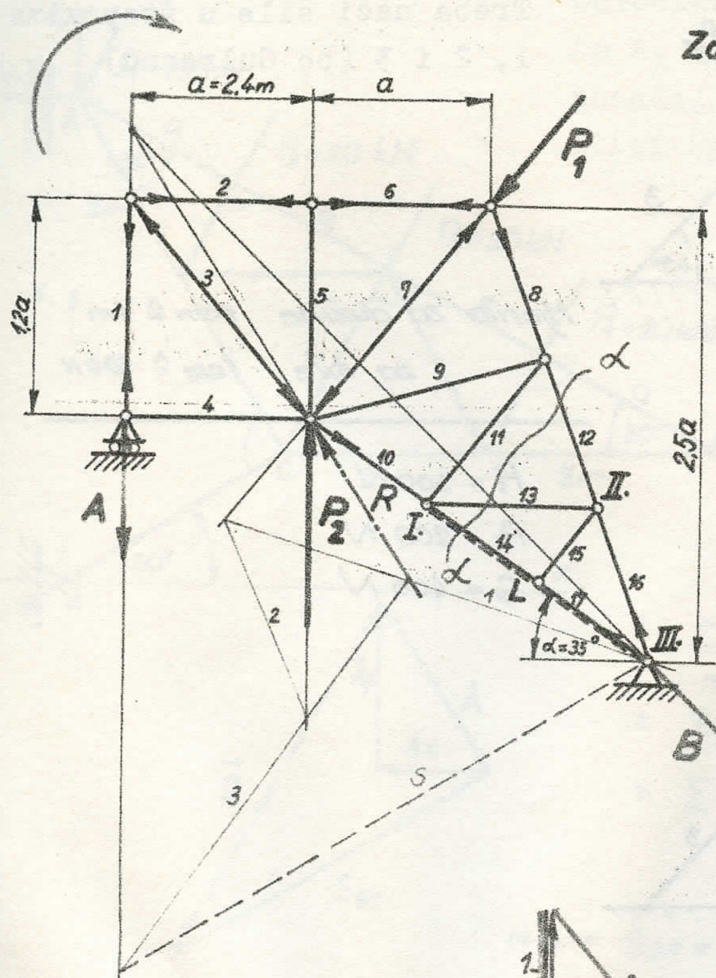
S_3 = 200 N

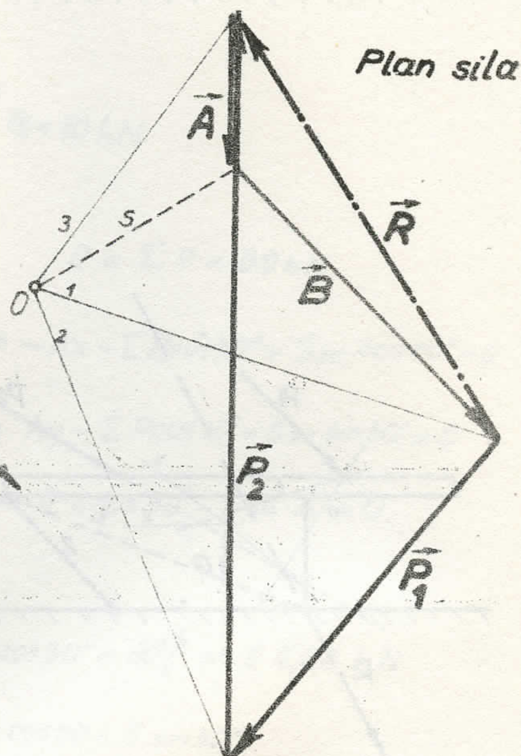
Rešetkasti nosači

24. ZADATAK Pomoću Cremoninog plana sila odrediti sile u štapovima rešetkastog nosača prikazanog na slici. Grafički (Culmann) i analitički (Ritter) kontrolirati sile u zadanom presjeku $\alpha - \alpha$.

Zadano: $P_1 = 14$ kN, $a = 2,4$ m, $P_2 = 25$ kN, $\alpha = 35°$

Mjerilo: 1 cm ≙ 2,5 kN; 1 cm ≙ 1 m





Kontrola po Ritter-u za α-α

I. $S_{12} = \frac{B \cdot x_1}{a_1} = \frac{12,5 \cdot 0,65}{2,1} =$

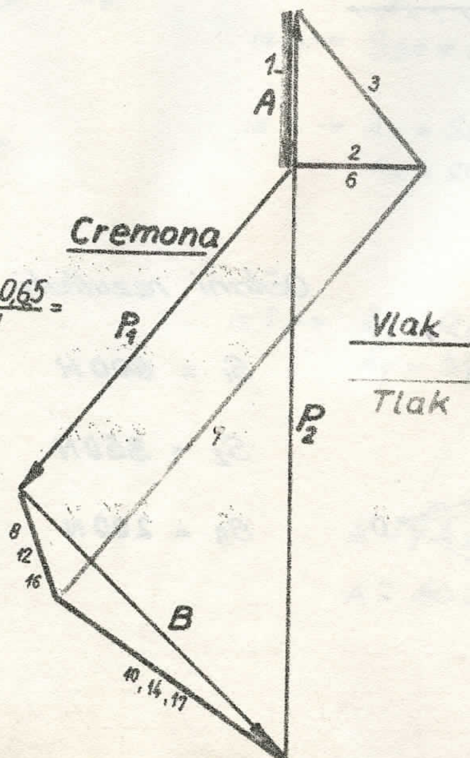
$S_{12} = 3,87$ kN

II. $S_{14} = \frac{B \cdot x_2}{a_2} =$

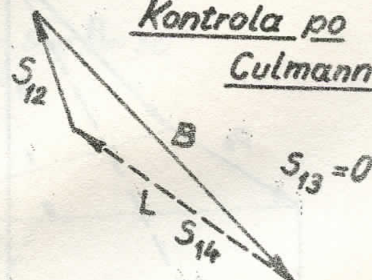
$S_{14} = \frac{12,5 \cdot 0,9}{1,26} =$

$S_{14} = 8,94$ kN

III. $S_{13} = 0$



Vlak / Tlak



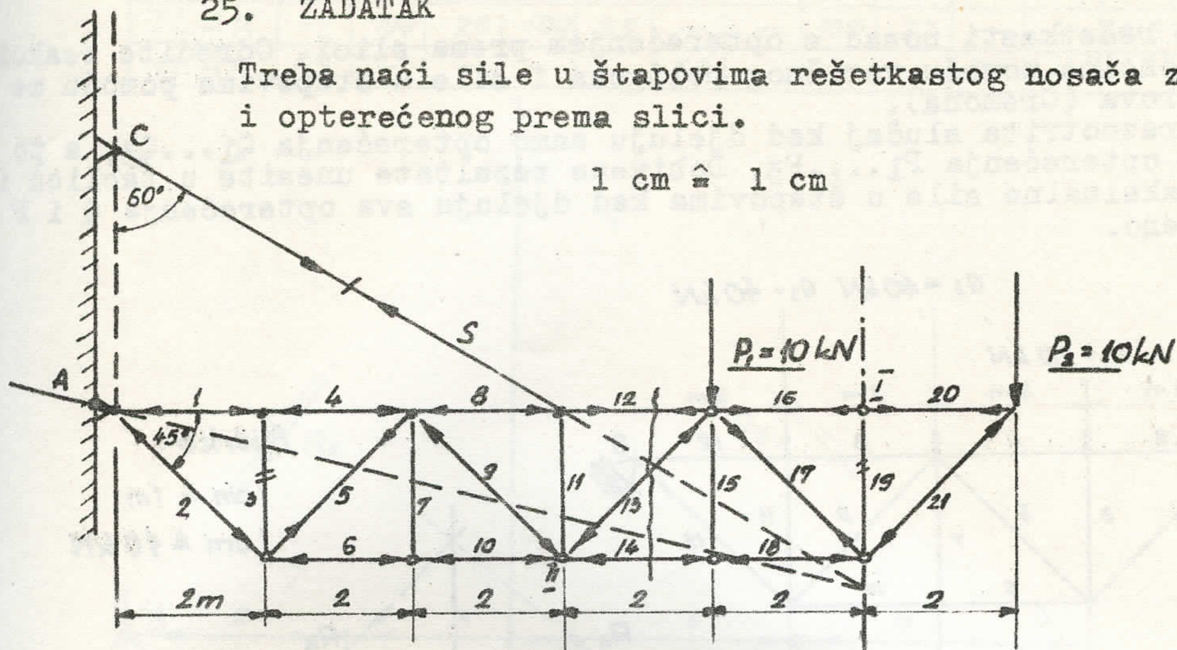
Reakcije: A = 5 kN
B = 12,5 kN

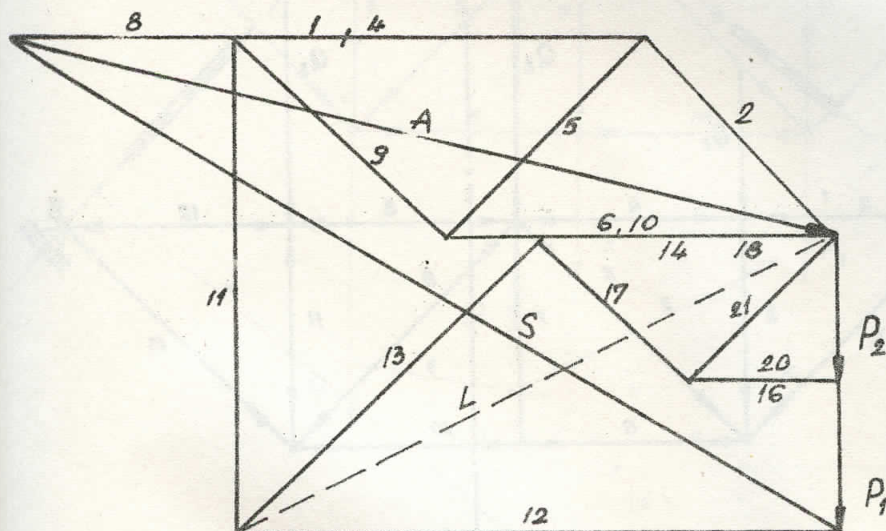
Sila S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Tlak [t]	–	–	6,6	–	–	–	18,9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Vlak [t]	5	4,4	–	–	–	4,4	–	1,4	–	9	–	1,4	–	9	–	1,4	9

25. ZADATAK

Treba naći sile u štapovima rešetkastog nosača zadanog i opterećenog prema slici.

1 cm ≙ 1 cm





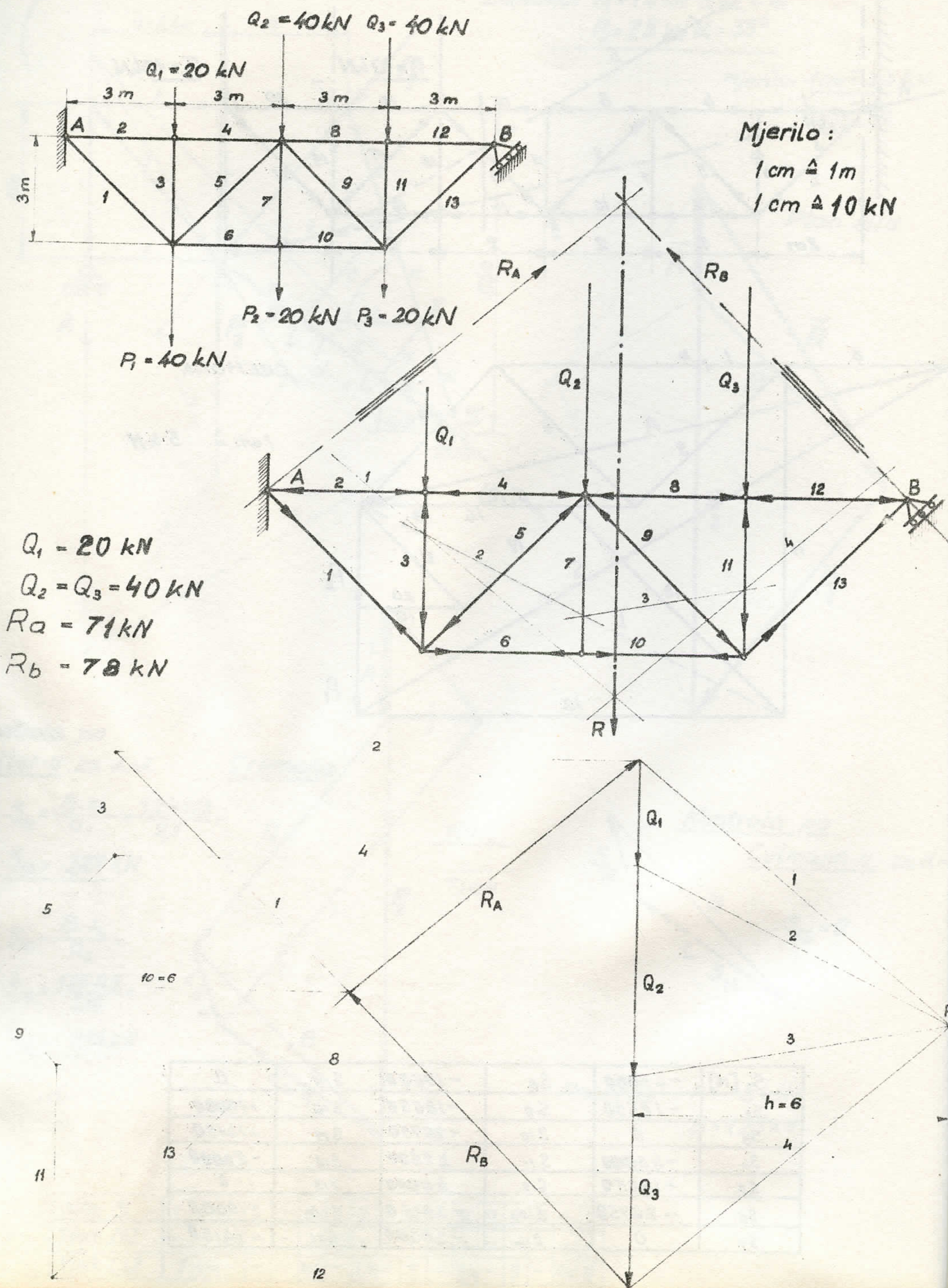
CREMONA

1cm ≙ 5 kN

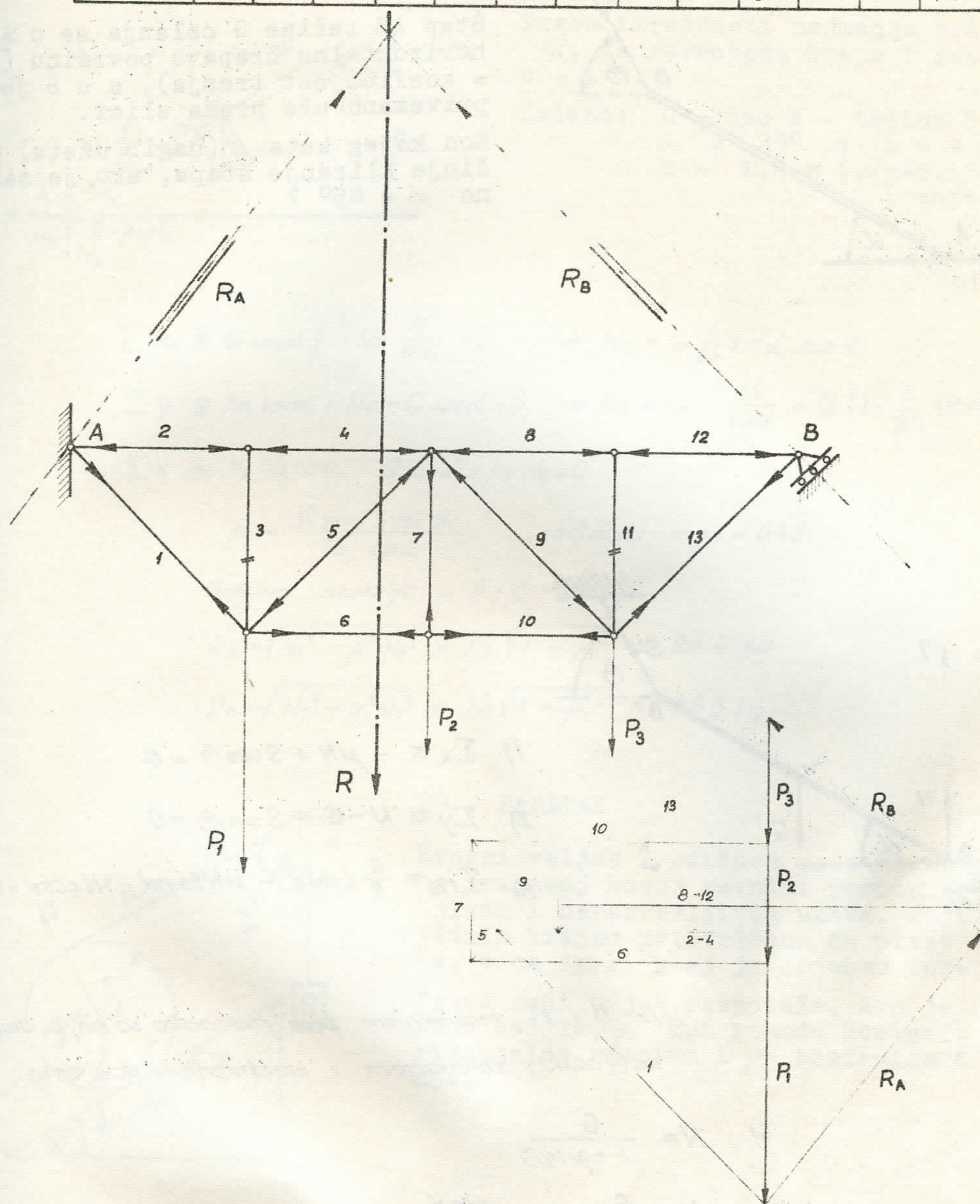
S_1 [N]	-45000	S_8	-18600	S_{15}	0
S_2	-18650	S_9	-18650	S_{16}	+10000
S_3	0	S_{10}	-26750	S_{17}	+14150
S_4	-45000	S_{11}	32500	S_{18}	-20000
S_5	+18650	S_{12}	40000	S_{19}	0
S_6	-26750	S_{13}	-28150	S_{20}	+10000
S_7	0	S_{14}	-20000	S_{21}	-14150

26. ZADATAK

Zadan je rešetkasti nosač s opterećenjem prema slici. Odredite reakcije u osloncima pomoću verižnog poligona i sile u štapovima pomoću metode čvorova (Cremona).
Posebno razmotrite slučaj kad djeluju samo opterećenja $Q_1 \dots Q_3$, a posebno za opterećenja $P_1 \dots P_3$. Dobivene rezultate unesite u tablicu i nađite maksimalne sile u štapovima kad djeluju sva opterećenja Q i P istovremeno.



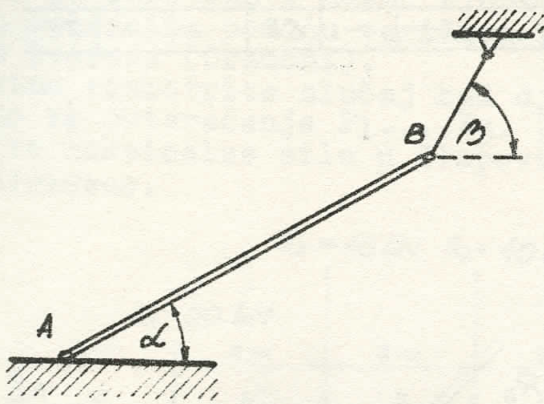
ŠTAP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
TLAK	—	100	20	100	35	—	—	109	22	—	4	109	—
VLAK	63	—	—	—	—	69	—	—	—	69	—	—	77



ŠTAP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
TLAK	—	80	—	80	7	—	—	70	21	—	—	70	—
VLAK	64	—	—	—	—	50	20	—	—	50	—	—	50

OPTEREĆENJA UKUPNOG DJELOVANJA SILA P i Q

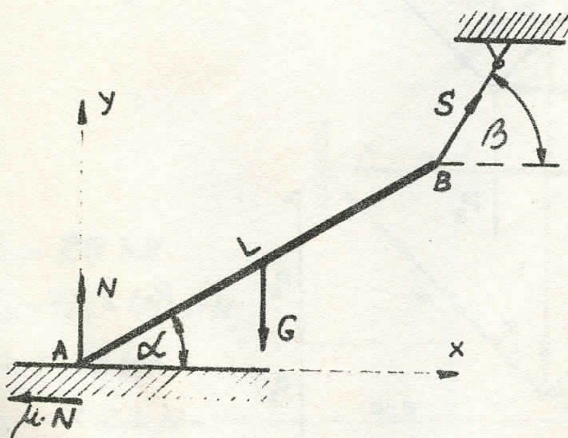
ŠTAP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
TLAK	—	180	20	180	42	—	—	179	43	—	40	179	—
VLAK	127	—	—	—	—	119	20	—	—	119	—	—	127



27. ZADATAK

Štap AB težine G oslanja se u A na horizontalnu hrapavu površinu (μ = = koeficijent trenja), a u B je privezano uže prema slici.

Kod kojeg kuta β (nagib užeta) počinje klizanje štapa, ako je zadano $\alpha = 45°$?



1.) $\sum x \equiv -\mu N + S\cos\beta = 0$

2.) $\sum y \equiv N - G + S\sin\beta = 0$

3.) $\sum M_B \equiv \frac{G}{2} L\cos\alpha - \mu N L\sin\alpha - N L\cos\alpha = 0$

Iz 1.) i 2.) množenjem prve jednadžbe sa $\sin\beta$, druge sa $(-\cos\beta)$, zbrajanjem i sređivanjem dobijemo:

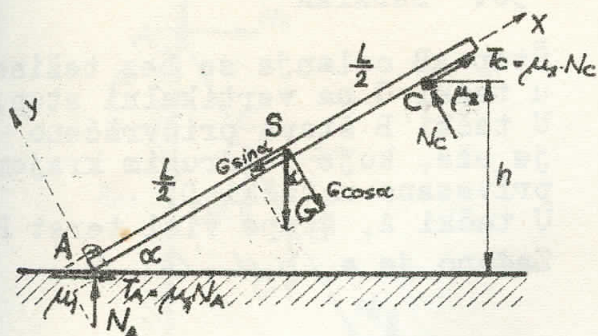
4.) $$N = \frac{G}{1 + \mu tg\beta}$$

Iz. 3.) $$N = \frac{G}{2} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

$$\frac{G}{1 + \mu tg\beta} = \frac{G}{2} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

$$tg\beta = 2tg\alpha + \frac{1}{\mu}$$

za $\alpha = 45°$ → $tg\beta = 2 + \frac{1}{\mu}$



28. ZADATAK

Treba izračunati najmanju vrijednost μ, za ravnotežu štapa i reakcije u A i C.

Zadano: G = 600 N - težina štapa
α = 25° ; L = 4 m
h = 1,2 m ; μ_2=0,15 koef. trenja u C

$$\sum M_A \equiv G\cos\alpha \cdot \frac{L}{2} - N_C \frac{h}{\sin\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad N_C = G\frac{L}{2h}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sum y \equiv N_A\cos\alpha + N_C - G\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_A = G - \frac{N_C}{\cos\alpha} = G\left(1 - \frac{L}{2h}\sin\alpha\right)$$

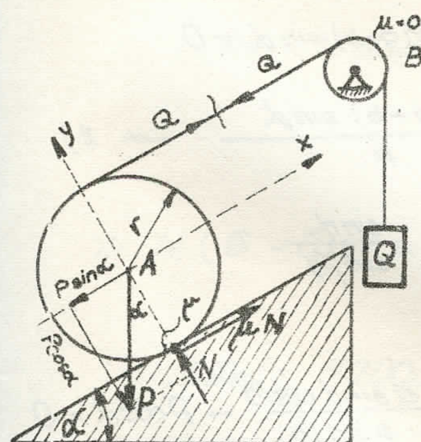
$$\sum x \equiv \mu_1 N_A \cos\alpha - G\sin\alpha + \mu_2 N_C = 0$$

$$\mu_1 = \frac{G\sin\alpha - \mu_2 N_C}{N_A\cos\alpha} \qquad \text{računski} \rightarrow \mu_1 = 0{,}48$$

Totalne reakcije u A i C :

$$R_A = \sqrt{N_A^2 + \mu_1^2 N_A^2} = N_A\sqrt{1+\mu_1^2} = 254\ kg$$

$$R_C = \sqrt{N_C^2 + \mu_2^2 N_C^2} = N_C\sqrt{1+\mu_2^2} = 388\ kg$$



29. ZADATAK

Kružni valjak A održava se u ravnoteži na hrapavoj kosoj ravnini pomoću savitljivog i nerastezljivog užeta, koje je jednim krajem pričvršćeno na plašt valjka, a na drugi kraj je obješen teret Q.

Treba naći uvjet ravnoteže, ako je P težina valjka, α kut između kosine i horizontalne ravnine i μ koeficijent trenja.

1.) $\sum x \equiv Q + \mu N - P\sin\alpha = 0 \rightarrow Q = P(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

2.) $\sum y \equiv N - P\cos\alpha = 0 \rightarrow N = P\cos\alpha$.

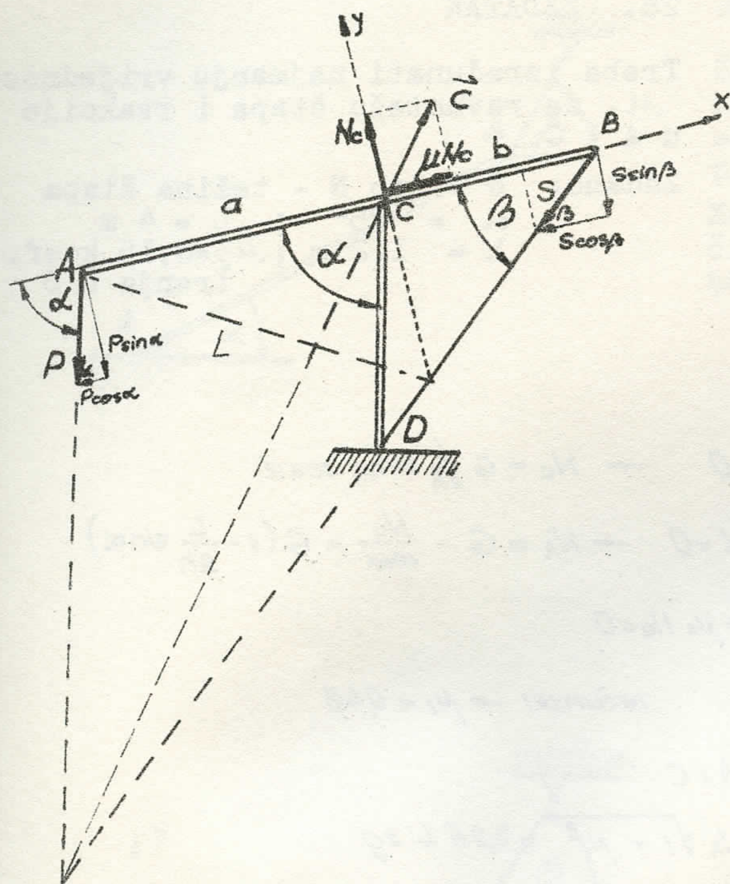
3.) $\sum M_A \equiv \mu \cdot N \cdot r - Q \cdot r = 0 \rightarrow Q = \mu N = \mu P\cos\alpha \rightarrow 1.)$

iz 1.) $2\mu = tg\alpha \rightarrow \mu = \frac{1}{2}tg\alpha$

iz 3.) $Q = \mu N = \mu P\cos\alpha = \frac{1}{2}tg\alpha P\cos\alpha = \frac{P}{2}\sin\alpha$

3o. ZADATAK

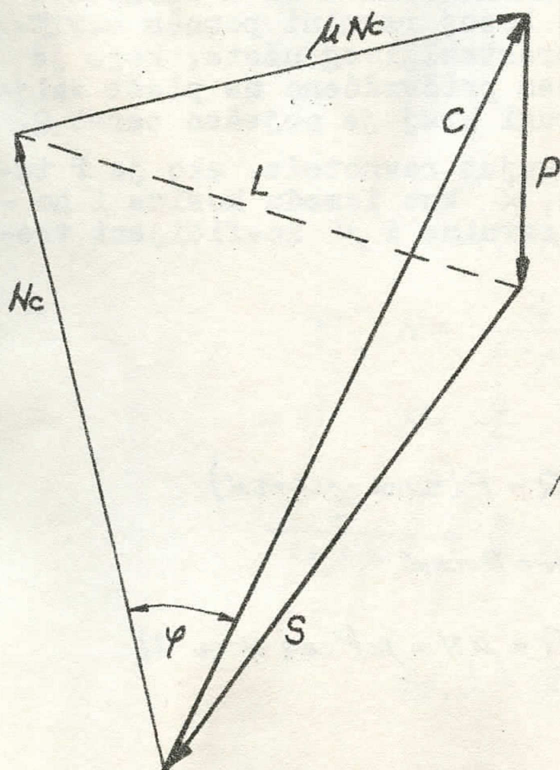
Štap AB oslanja se bez težine u tački C na vertikalni stup. U tački B štapa pričvršćeno je uže, koje je drugim krajem privezano u tački D. U tački A, štapa visi teret P. Zadano je a, b, α, β, P



Treba naći:

a) napetost u užetu BD i koeficijent trenja u C za slučaj ravnoteže

b) odgovarajući plan sila



1.) $\sum x \equiv \mu N_c - S\cos\beta - P\cos\alpha = 0$

2.) $\sum y \equiv N_c - S\sin\beta - P\sin\alpha = 0$

3.) $\sum M_B \equiv N_c \cdot b - P(a+b)\sin\alpha = 0$

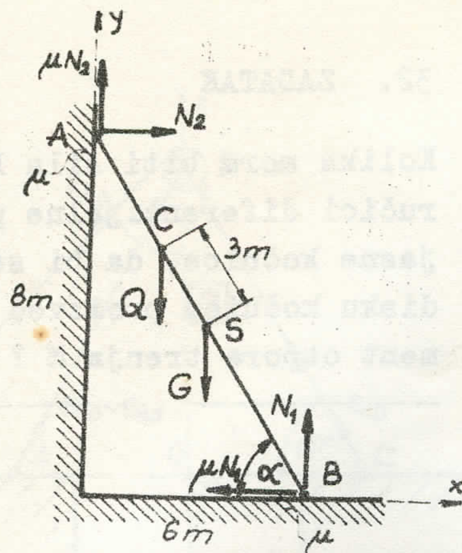
Iz 3.) $\rightarrow N_c = \dfrac{P(a+b)\sin\alpha}{b} \longrightarrow$ 2.)

$$S = P\,\frac{a}{b}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Iz 1.)

$$\frac{\mu P(a+b)\sin\alpha}{b} - P\,\frac{a\sin\alpha\cos\beta}{b\sin\beta} - P\cos\alpha = 0$$

$$\mu = \frac{a\,\mathrm{ctg}\beta + b\,\mathrm{ctg}\alpha}{a+b}$$



31. ZADATAK

Ljestve težine G = 300 N naslanjaju se u A na vertikalni zid, a u B na horizontalni pod.
Po ljestvama se penje čovjek težine Q = 600 N. U položaju C nastupa klizanje ljestava.
Treba naći μ, ako je $\mu_A = \mu_B = \mu$

$AB = L = \sqrt{64 + 36} = 10$ m

1.) $\sum M_A \equiv N_1 \cdot 6 - G \cdot 5 \cdot \cos\alpha - Q \cdot 2\cos\alpha - \mu N_1 \cdot 8 = 0$

2.) $\sum x \equiv N_2 - \mu N_1 = 0$ $\cos\alpha = 0{,}6$

3.) $\sum y \equiv N_1 + \mu N_2 - G - Q = 0$ $\sin\alpha = 0{,}8$

Iz 1.) $N_1(6 - 8\mu) = 1620$

Iz. 2.) $N_2 = \mu N_1$

što u 3.) daje $N_1 + \mu N_2 = 900$

$$N_1 + \mu^2 N_1 = 900 \rightarrow N_1 = \frac{900}{1+\mu^2}$$

ili $N_1(6 - 8\mu) = \dfrac{900}{1+\mu^2}(6 - 8\mu) = 1620$

$1620\mu^2 + 7200\mu - 3780 = 0$ ili

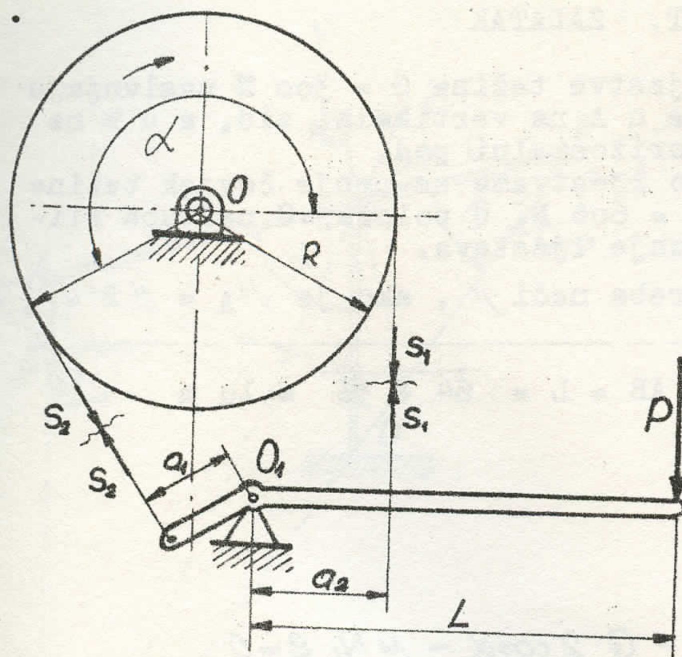
$\mu^2 + 4{,}38\mu - 2{,}3 = 0$

odakle je: $\mu_{1,2} = \dfrac{-4{,}38 \pm \sqrt{19{,}2 + 9{,}2}}{2}$

$$\mu_{1,2} = \frac{-4{,}38 \pm 5{,}31}{2}$$

$$\mu = \frac{0{,}93}{2} = 0{,}467$$

Uzimamo u obzir samo $\mu \geq 0$



32. ZADATAK

Kolika mora biti sila P na ručici diferencijalne po - jasne kočnice, da bi se na disku kočnice proizveo mo - ment otpora trenja M ?

$\Sigma M_0 = 0$

$$M = (S_1 - S_2) \cdot R$$

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

$$M = S_2 (e^{\mu\alpha} - 1) \cdot R$$

$$\Sigma M_{O_1} \equiv P \cdot L - S_1 a_2 + S_2 a_1 = 0$$

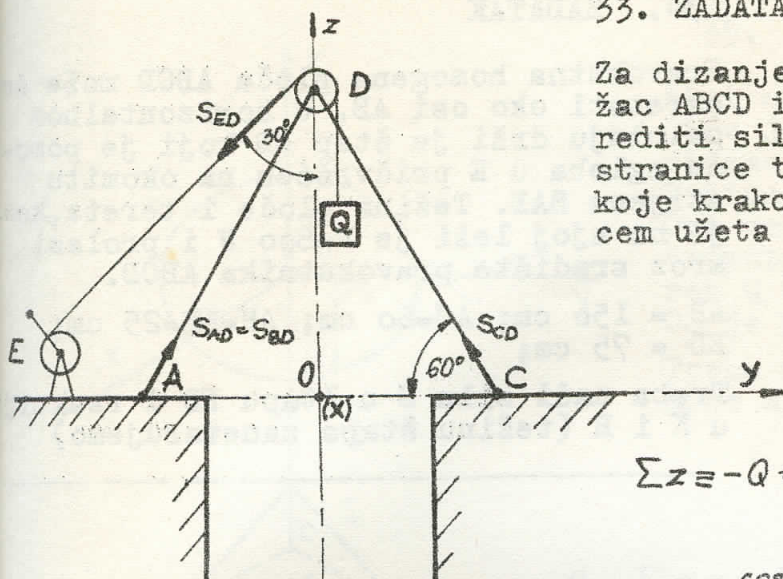
$$P = \frac{1}{L}(S_1 a_2 - S_2 a_1) =$$

$$= \frac{1}{L} \cdot \frac{M}{R(e^{\mu\alpha} - 1)} (e^{\mu\alpha} \cdot a_2 - a_1)$$

$$S_2 = \frac{M}{R(e^{\mu\alpha} - 1)}$$

$$S_1 = e^{\mu\alpha} \frac{M}{R(e^{\mu\alpha} - 1)}$$

$$P = \frac{M}{LR} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} a_2 - a_1}{e^{\mu\alpha} - 1}$$



33. ZADATAK

Za dizanje tereta Q = 3o kN služi tronožac ABCD i vitlo E prema slici. Treba odrediti sile u štapovima tronošca, ako su stranice trokuta ABC jednake, a kutevi koje krakovi tronožca zatvaraju s pravcem užeta DE jednaki 60°.

$$\sum z \equiv -Q + S_{CD}\cdot \sin 60° + 2S_{AD}\cdot \cos 30° - S_{ED}\cdot \cos 30° = 0$$

$$\cos 30° = \sin 60° = 0{,}866 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ED} = Q$$

uvrštenjem dobivamo:

$$-Q(1+\cos 30°) + S_{CD}\cdot \cos 30° + 2S_{AD}\cdot \cos 30 = 0$$

$$\sum x \equiv S_{BD}\cdot \cos 60° \cdot \cos 30° - S_{AD}\cos 60° \cdot \cos 30° = 0$$

$$S_{BD} = S_{AD}$$

$$\sum y \equiv 2S_{AD}\cdot \cos^2 60° - Q\cdot \sin 30 - S_{CD}\cdot \cos 60 = 0$$

$$2S_{AD} = \frac{Q + S_{CD}}{\cos 60}$$

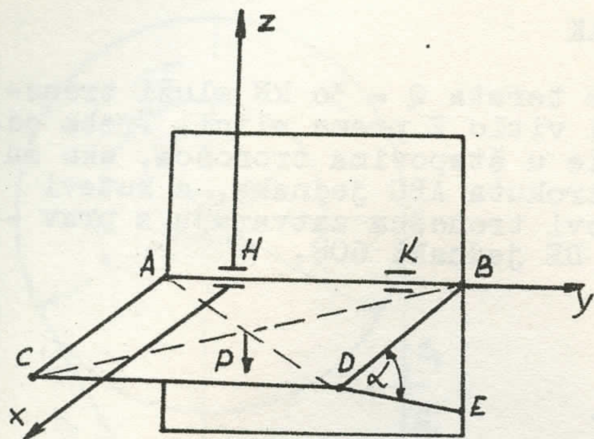
$$Q(1+\cos 30°) = S_{CD}\cdot \cos 30° + Q\,tg 60° + S_{CD}\cdot tg 60° = 0$$

$$Q(1+\cos 30° - tg 60°) = S_{CD}(\cos 30° + tg 60°)$$

$$S_{CD} = Q\,\frac{1+\cos 30° - tg 60°}{\cos 30° + tg 60°} = 30\cdot \frac{1 + 0{,}866 - 1{,}732}{0{,}866 + 1{,}732} = 30\cdot \frac{0{,}134}{2{,}598} = 1{,}5\ kN$$

$$S_{AD} = \frac{Q + S_{CD}}{2\cos 60°}$$

$S_{AD} = 31{,}55$ kN



34. ZADATAK

Pravokutna homogena ploča ABCD može se okretati oko osi AB. U horizontalnom položaju drži je štap ED koji je pomoću zgloba u E pričvršćen na okomitu stijenu BAE. Težina ploče i tereta, koji na njoj leži je P=800 N i prolazi kroz središte pravokutnika ABCD.

AB = 150 cm; AC=60 cm; AH=KB=25 cm; ED = 75 cm;

Treba naći silu S u štapu ED i reakcij u K i H (težinu štapa zanemarujemo)

$\cos\alpha = \frac{60}{75} = 0{,}8$

$\sin\alpha = 0{,}599$

$$\sum z \equiv K_z + H_z + S\cdot\sin\alpha - P = 0$$

$$\sum x \equiv S\cos\alpha - K_x - H_x = 0$$

$$\sum y \equiv 60\cdot S\cdot\sin\alpha - P\cdot 30 = 0$$

$$S = \frac{1}{2}P\cdot\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{400}{0{,}599} = 668\,N$$

$$\sum M_z \equiv S\cdot 125\cdot\cos\alpha - K_x\cdot 100 = 0$$

$$K_x = 1{,}25\cdot S\cdot\cos\alpha = 1{,}25\cdot 668\cdot 0{,}8 = 668\,N$$

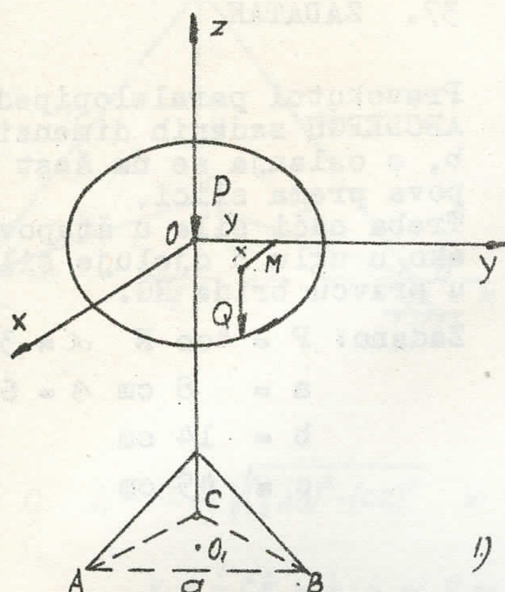
$$H_x = K_x - S\cos\alpha = 668(1-0{,}8) = 136\,N$$

$$\sum M_x = S\cdot 125\cdot\sin\alpha - P\cdot 50 + K_z\cdot 100 = 0$$

$$K_z = 0{,}5P - 1{,}25\cdot 668\cdot 0{,}599 = 100\,N$$

$H_z = P - K_z - S_{\sin}{}^{\alpha} = 800-100-668.0,599$

$H_z = 300$ N



35. ZADATAK

Stol stoji na tri noge, čiji vrhovi čine jednakostranični trokut sa stranicama a.
Težina stola P djeluje u vertikali OO_1
Ova vertikala prolazi kroz težište O_1 trokuta ABC. Na stolu se nalazi teret Q u tački M koordinata x,y,a os O_y je paralelna sa stranicom AB.
Treba naći pritisak svake pojedine noge na pod.

1) $\sum z \equiv -P - Q + N_A + N_B + N_C = 0$

u smjeru x i y nema sila

2) $\sum M_y \equiv N_B \cdot a\frac{\sqrt{3}}{6} + N_A \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} - N_C \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - Q \cdot x = 0$

3) $\sum M_x \equiv N_A \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot y - N_B \cdot \frac{a}{2} = 0$

Iz 1.) $N_C = P + Q - N_A - N_B$ 4.)

u 2.) $N_B \cdot a\frac{\sqrt{3}}{6} + N_A \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + N_A \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + N_B \cdot a\frac{\sqrt{3}}{3} - \left[(P+Q)a\frac{\sqrt{3}}{3} + Qx\right] = 0$

$$N_B a\sqrt{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + N_A a\sqrt{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = (P+Q)a\frac{\sqrt{3}}{3} + Qx$$

$$N_B \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} + N_A \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = (P+Q)a\frac{\sqrt{3}}{3} + Qx$$

Iz 3.) $N_B \cdot \frac{a}{2} = N_A \cdot \frac{a}{2} + Qy$ 5.)

$$N_A \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + Qy\sqrt{3} + N_A \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = (P+Q)a\frac{\sqrt{3}}{3} + Qx$$

$$N_A \cdot a\sqrt{3} = (P+Q)a\frac{\sqrt{3}}{3} + Qx - Qy \cdot \sqrt{3}$$

$$N_A = \frac{P+Q}{3} + \frac{Q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)$$

Iz 5.) $N_B \cdot \frac{a}{2} = \left[\frac{P+Q}{3} + \frac{Q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)\right]\frac{a}{2} + Qy$

$$N_B = \frac{P+Q}{3} + \frac{Q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + y\right)$$

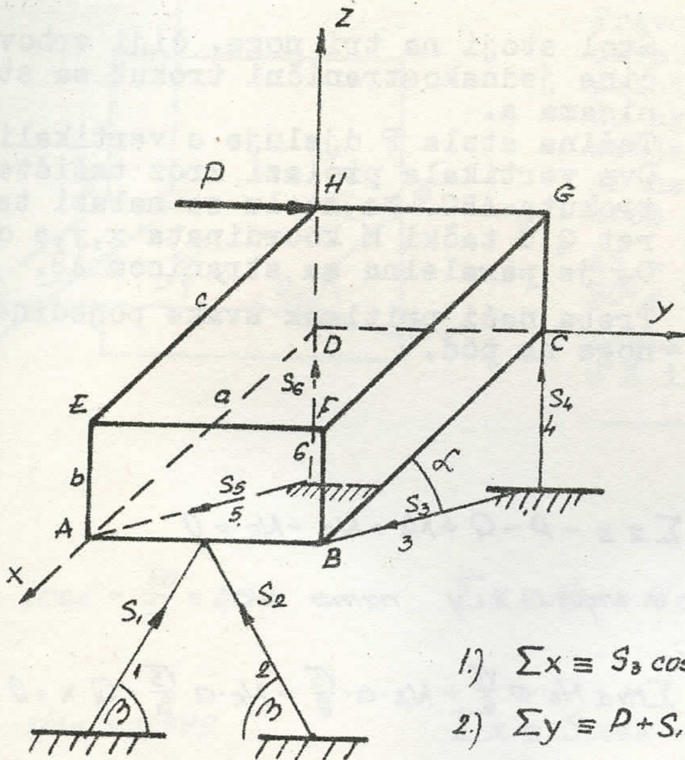
Iz 4.) $N_C = P + Q - \frac{P+Q}{3} - \frac{Q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right) - \frac{P+Q}{3} - \frac{Q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)$

$$N_C = \frac{P+Q}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{a} \cdot Q$$

37. ZADATAK

Pravokutni paralelopiped ABCDEFGH zadanih dimenzija a, b, c oslanja se na šest štapova prema slici.
Treba naći sile u štapovima, ako u uglu H djeluje sila P u pravcu brida HG.

Zadano: P = 400 N $\alpha = 30^0$
a = 8 cm $\beta = 60^0$
b = 14 cm
c = 45 cm



1.) $\Sigma X \equiv S_3 \cos\alpha + S_5 \cos\alpha = 0 \rightarrow S_3 = -S_5$

2.) $\Sigma Y \equiv P + S_1 \cos\beta - S_2 \cos\beta = 0$

3.) $\Sigma Z \equiv S_6 + S_4 + S_1 \sin\beta + S_2 \sin\beta + S_3 \sin\alpha + S_5 \sin\alpha = 0$

4.) $\Sigma M_y \equiv (S_1 + S_2)\sin\beta \cdot c + (S_3 + S_5)\sin\alpha \cdot c = 0 \rightarrow S_1 = -S_2$

5.) $\Sigma M_x \equiv (S_1 + S_2)\sin\beta \frac{a}{2} + S_3 \sin\alpha \cdot a + S_4 \cdot a - P \cdot b = 0$

6.) $\Sigma M_z \equiv (S_1 - S_2)\cos\beta \cdot c - S_3 \cos\alpha \cdot a = 0$

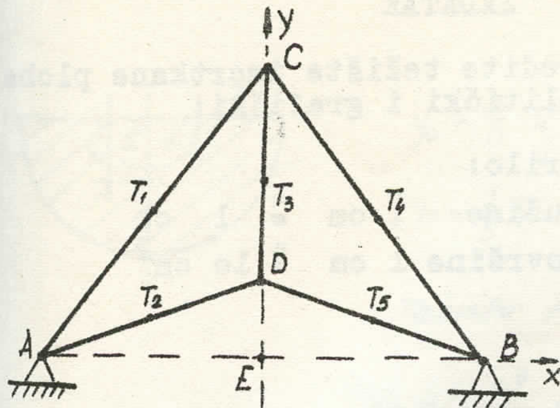
Iz 2.) $2 S_2 \cos\beta = +P \rightarrow S_1 = -S_2 = -40\ N$

Iz 6.) $2 S_1 \cos\beta \cdot c = S_3 \cos\alpha \cdot a \rightarrow S_3 = -S_5 = -260\ N$

Iz. 5.) $S_4 \cdot a = P \cdot b - S_3 \sin\alpha \cdot a$

$S_4 = -605\ N$

iz 3) $S_6 = -S_4 = 605\ N$



36. ZADATAK

Treba naći težište simetričnog rešetkastog nosača ABCD, ako je zadano:

AB = 6 m
CD = 3 m
DE = 1 m

a) Analitički:

$$x_o = 0 \qquad y_o = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{\sum L_i}$$

1) $L_1 = \overline{AC} = \sqrt{(\frac{1}{2}AB)^2 - (CE)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5m$

$y_1 = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2\,m$

2) $L_2 = \overline{AD} = \sqrt{(\frac{1}{2}\overline{AB})^2 + (\overline{DE})^2} = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = 3{,}16\,m$

$y_2 = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}\cdot 1 = 0{,}5\,m$

3) $L_3 = \overline{CD} = 3m \qquad y_3 = \overline{DE} + \frac{1}{2}\overline{CD} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5\,m$

4) $L_4 = L_1 = 5m \qquad y_4 = y_1 = 2m$

5) $L_5 = L_2 = 3{,}16m \qquad y_5 = y_2 = 0{,}5m$

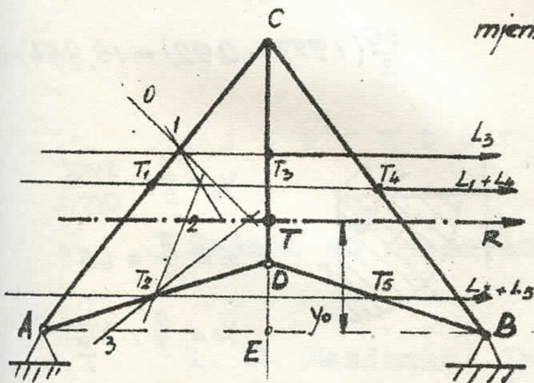
$$\sum L_i = L = 2\cdot 5 + 2\cdot 3{,}16 + 3 = 10 + 6{,}32 + 3 = 19{,}32\,m$$

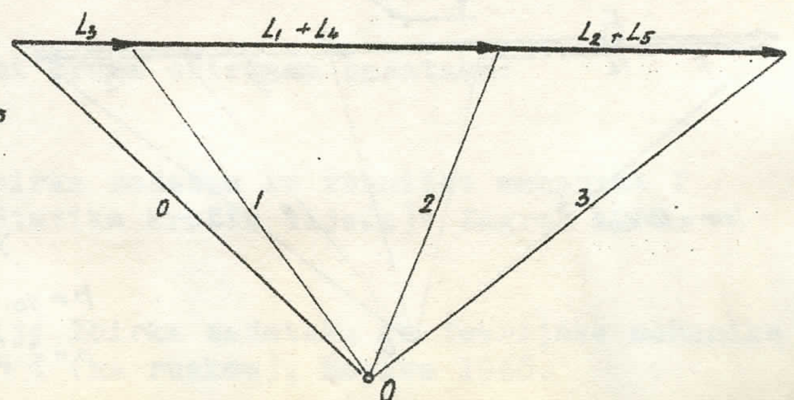
$$y_o = \frac{2\,(5\cdot 2 + 3{,}16\cdot 0{,}5) + 3\cdot 2{,}5}{19{,}32} = \frac{20 + 3{,}16 + 7{,}5}{19{,}32} = \frac{30{,}66}{19{,}32}$$

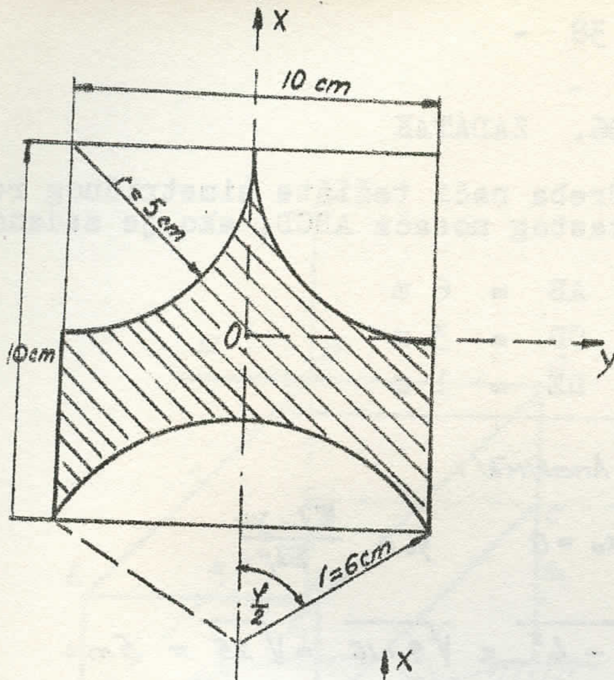
$y_o = 1{,}58\,m$

b) Grafički:

mjerilo: 1cm ≙ 1m za plan položaja
1cm ≙ 2m za plan sila







38. ZADATAK

Odredite težište iscrtkane plohe analitički i grafički:

Mjerilo:

dužine 1 cm ≙ 1 cm

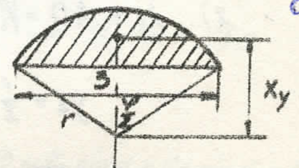
površine 1 cm ≙ 1o cm²

$$p = \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi} = 2,12\,cm$$

Neoslabljena površina

$$F_1 = 10\cdot 10 = 100\,cm^2$$

$$F_2 = F_3 = \frac{1}{4}r^2\pi = \frac{1}{4}\cdot 5^2\cdot\pi = 19,64\,cm^2$$



$$F_4 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\varphi^\circ\cdot\pi}{180^\circ} - \sin\varphi\right)$$

$$\frac{s}{2} = r\sin\frac{\varphi}{2} \qquad s = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r} = \frac{10}{12} = 0,833$$

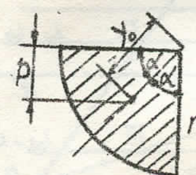
$$\frac{\varphi}{2} = 56,5^\circ \rightarrow \varphi = 113^\circ$$

$$\sin\varphi = \cos(\varphi - 90) = 113^\circ = \cos 2 \;\; = \cos 23$$

$$\sin\varphi = 0,92$$

$$F_4 = \frac{6^2}{2}\cdot\left(\frac{113^\circ\cdot\pi}{180^\circ} - 0,92\right) =$$

$$= \frac{36}{2}(1,973 - 0,92) = 18,954\,cm^2$$



$$Y_0 = \frac{2}{3}l\cdot\frac{\sin\alpha}{arc\,\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$Y_0 = \frac{2}{3}\cdot r\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\frac{\pi}{4}}$$

$$y = \frac{2}{3}r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}\cdot\sqrt{2} = 3\,cm$$

$$p = y_0\cdot\cos\alpha = y_0\cdot\cos 45^\circ = \frac{4}{3}\cdot\frac{r\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$p = \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi} = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{\pi} = 2,12\,cm$$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}\cdot\sqrt{2} = 3$

p

F_2 5

F_1 y

F 4 S 1

0 F_4

h = 3,311

$x_4 = 4,4\,cm$

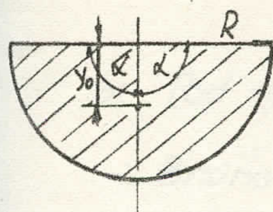
R = 6 cm

F_1 F F_4 F_3 F_2

1cm = 10 cm²

4 0 1 2 3

0



$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\mathrm{arc}\,\alpha} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \qquad y_0 \rightarrow a\,F_2 + F_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = \frac{4.5}{3\pi} = 2{,}12\,cm$$

Težište F_4

$$x_4 = \frac{s^3}{12 \cdot F_4} = \frac{10^3}{12 \cdot 18{,}954} = \frac{1000}{12 \cdot 18{,}954} = 4{,}4\,cm$$

$$x = \frac{F_1 \cdot x_1 - (F_2 + F_3)\,x_3 - F_4 \cdot x_4'}{F} = \frac{100 \cdot 0 - 2 \cdot 19{,}64(5 - 2{,}12) - 18{,}954(-5 - 3{,}311 + 4{,}4)}{100 - 2 \cdot 19{,}64 - 18{,}954}$$

$$x = \frac{-39{,}28 \cdot 2{,}88 - 18{,}954 \cdot (-3{,}911)}{100 - 58{,}234} = \frac{-113{,}1 + 74{,}2}{41{,}766} = -\frac{38{,}9}{41{,}77} = -0{,}93\,cm$$

L i t e r a t u r a

Zadaci su rješavani prema zbirkama zadataka:

1. D. Bazjanac: Zbirka zadatka iz tehničke mahanike I (Statika krutih tijela), Zagreb 1960.

2. I. V. Meščerskij: Zbirka zadataka iz teorijske mehanike (na ruskom), Moskva 1968.

K I N E M A T I K A

A) P R A V O C R T N O G I B A N J E

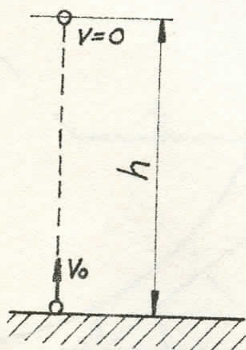
ZADATAK 1

Vertikalni hitac u vis

Tijelo je bačeno vertikalno u vis početnom brzinom $v_0=20$ m/sek. Kolika je visina penjanja i kolika je brzina kojom će tijelo pasti opet na zemlju?

Rješenje:

a) Gibanje u vis - jednoliko usporeno gibanje po pravcu



Brzina za jednoliko usporeno gibanje

$v = v_0 - at$

$a = g$ (zemljina gravitacija)

$v = 0$ na visini „h"

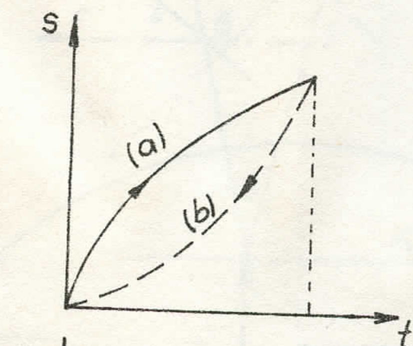
$v_0 = 20$ m/s

pa je

$0 = v_0 - gt \rightarrow v_0 = gt$

odnosno potrebno vrijeme da tijelo dostigne visinu „h"

$t = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{9{,}81} = \underline{2{,}04 \text{ s}}$



Prevaljeni put (visina penjanja)

$s = s_0 + v_0 t - \frac{a}{2}t^2$

$s_0 = 0$

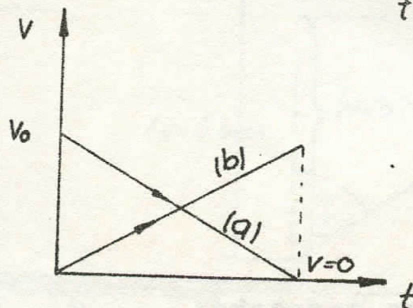
$a = g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

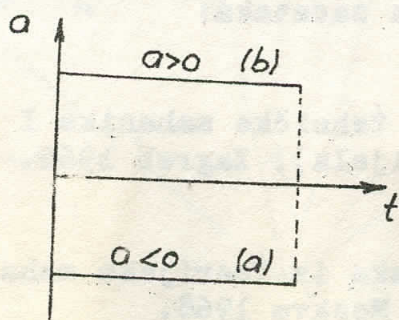
$s = h = ?$

$h = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = gt \cdot t - \frac{g}{2}t^2$

$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{9{,}81 \cdot 2{,}04^2}{2}$

$\underline{h = 20{,}4 \text{ m}}$





b) Pad tijela s visine h – jednoliko ubrzano gibanje po pravcu

Brzina

$$v = v_0 + gt$$

$v_0 = 0$ (točka polazi iz stanja mirovanja na visini „h"

$$v = gt \rightarrow t = \frac{v}{g}$$

Prevaljeni put

$$s = h = s_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

$s_0 = 0$

$v_0 = 0$

$$h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}$$

i odatle

$v = \sqrt{2gh}$ – brzina slobodnog pada

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20{,}4}$$

$v = 20\ m/s$ – tijelo će pasti istom brzinom kojom je bačeno u vis

ZADATAK 2

Za određivanje dubine neke jame puštamo tijelo da slobodno pada i mjerimo vrijeme t koje protekne od trenutka puštanja do trenutka kada začujemo udar tijela o dno jame. Kolika je dubina jame ako je izmjereno vrijeme t=10 sek? Brzina zvuka v_z = 300 m/s.

Rješenje:

Izmjereno vrijeme se sastoji od vremena padanja (t_1) predmeta i vremena potrebnog da se zvuk udara predmeta o dno jame (t_2) vrati do vrha jame tj.

$$t_u = t_1 + t_2 = 10 \text{ sek}$$

odavde $t_1 = 10 - t_2$

Za slobodni pad predmeta

$$v = v_0 + gt_1$$

$$v_0 = 0$$

$$v = gt_1 \quad \dots (1)$$

$$s = s_0 + v_0 t_1 + \frac{g}{2} t_1^2$$

$$s_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

$$s = h = \frac{g}{2} t_1^2 \quad \dots (2)$$

Uvrštenjem iz (1) $t_1 = \frac{v}{g}$ u (2)

$$h = \frac{g}{2} \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$$

odnosno za $t_1 = 10 - t_2 = \frac{v}{g}$

$$h = \frac{g}{2} (10 - t_2)^2 \dots (2a)$$

Brzina zvuka

$$v_z = \frac{h}{t_2} = 300 \text{ m/s}$$

odavde $t_2 = \frac{h}{300} \quad \dots (3)$

i uvrštenjem u (2a) dobivamo nakon sređivanja

$$h^2 - 24246 h + 9\,000\,000 = 0$$

te rješavanjem

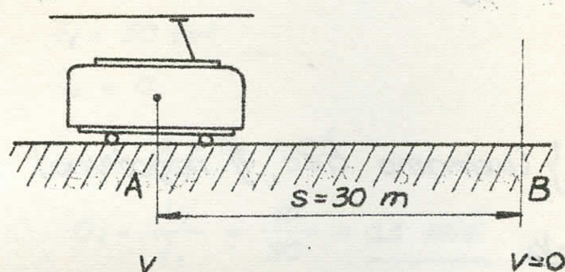
$$h = 378 \text{ m}$$

ZADATAK 3

Koliko je usporenje tramvaja ako on, vozeći brzinom v=36 km/h, treba da se zaustavi nakon 3o m prevaljenog puta. Za koliko se može smanjiti brzina tog tramvaja na dužini puta od 3 m, ako je najveće dozvoljena usporenje a_{max} = -2,5 m/s2?

Rješenje:

a) $$v = 36\ km/h = 36\ \frac{1000}{3600} = 10\ m/s$$



Za jednoliko usporeno gibanje po pravcu :

$$v_B = v_0 - at \quad \ldots\ (1)$$
$$s_B = s_0 + v_0 t - \frac{a}{2}t^2 \quad \ldots\ (2)$$

$v_0 = 10\ m/s$

$v_B = 0$

iz (1)

$t = \frac{v_0}{a}$ (vrijeme potrebno da se tramvaj zaustavi)

iz (2) za $s_0 = 0$ i $s_B = 30\ m$

$$s_B = -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t\ [m] \quad \cdots\ (3)$$

uvrštenjem izraza za t u (3) slijedi

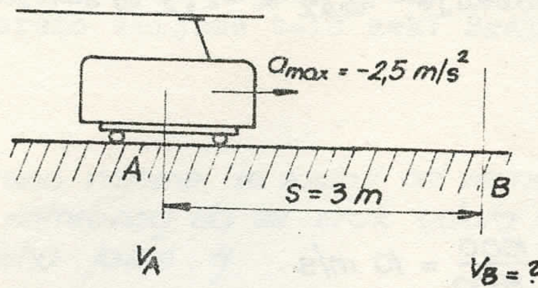
$$s_B = -\frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{a} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

i odavde traženo usporenje

$$a = \frac{v_0^2}{2s_B}$$

$$a = \frac{10^2}{2\cdot 30} = \frac{100}{60} = 1{,}66\ m/s^2$$

b)



Traženo smanjenje brzine

$$\Delta V = V_A - V_B = 10 - V_B$$

$$V_A = 10\ m/s$$

1) $V_B = V_A + at$

2) $S_B = V_A t + \frac{a}{2} t^2$ } (uzimamo $a<0$, tj. negativno)

iz 1) $\rightarrow t = \frac{V_B - V_A}{a}$

i uvrštenjem u 2)

$$S_B = V_A \frac{V_B - V_A}{a} + \frac{a}{2}(V_B - V_A)^2 \frac{1}{a^2}$$

$$S_B = \frac{1}{2a}(V_B^2 - V_A^2)$$

odavde

$$V_B^2 = V_A^2 + 2aS_B$$

$$V_B = \sqrt{10^2 + 2(-2,5) \cdot 3} = \sqrt{85}$$

$$V_B = 9,22\ m/s = 33,2\ km/h$$

ili

$$\Delta v = V_A - V_B = 36 - 33,2 = \underline{2,8\ km/h}$$

ZADATAK 4 -

Vlak polazi iz stanice i za 3o sek postiže brzinu v=54 km/h. Nakon 3 min vožnje tom brzinom giba se jednoliko usporeno s usporenjem od o,4 m/s^2 sve dok ne stane.

Treba izračunati:

1. ubrzanje vlaka pri polasku
2. prevaljeni put
3. ukupno trajanje vožnje
4. nacrtati dijagrame v=f(t), a=f(t), s=f(t)

Rješenje:

1) $V_1 = 54\ km/h = 15\ m/s$

$t_1 = 30\ sek$

$V_0 = 0$

iz $V_1 = V_0 + a_1 t_1$

$$a_1 = \frac{V_1}{t_1} = \frac{15}{30} = 0{,}5\ m/s^2$$

2) $s_1 = s_0 + V_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$

$s_0 = 0$

$t_1 = 30\ s$

$a_1 = 0{,}5\ m/s^2$

$V_0 = 0$

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 = \frac{0{,}5}{2} \cdot 30^2 = 225\ m$$

$$s_2 = V_1 t_2 = 15 \cdot 3 \cdot 60 = 2700\ m \quad (a_2 = 0)$$

$$s_3 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2$$

iz $V_3 = V_1 - a_3 t_3 = 0$

$$t_3 = \frac{V_1}{a_3} = \frac{15}{0{,}4} = 37{,}5\ s$$

$$s_3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 37{,}5^2 = 282\ m$$

Ukupno prevaljeni put

$$s_U = s_1 + s_2 + s_3 = 3207\ m$$

Prema dijagramu $v = f(t)$ možemo ukupno prevaljeni put izračunati kao zbroj površina ispod krivulje tj.

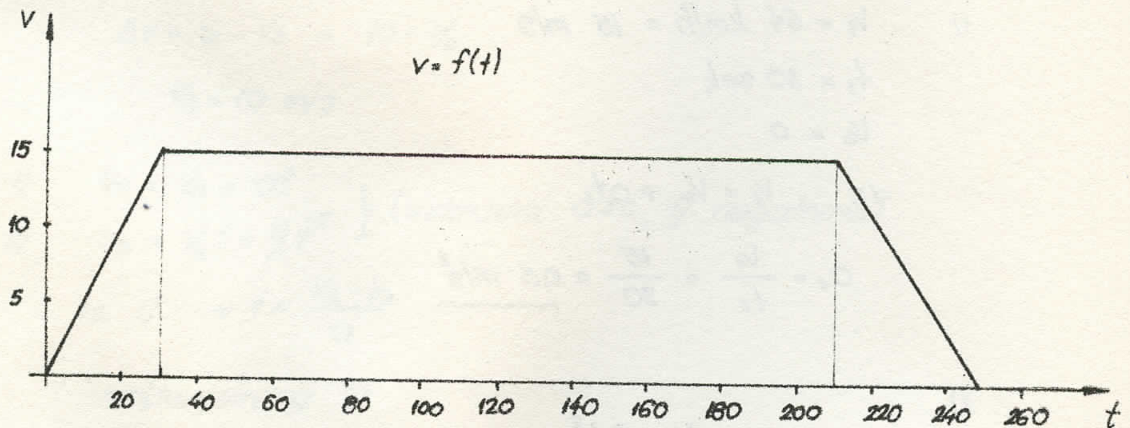
$$s_u = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} + t_2 \cdot v_1 + \frac{t_3 v_1}{2}$$

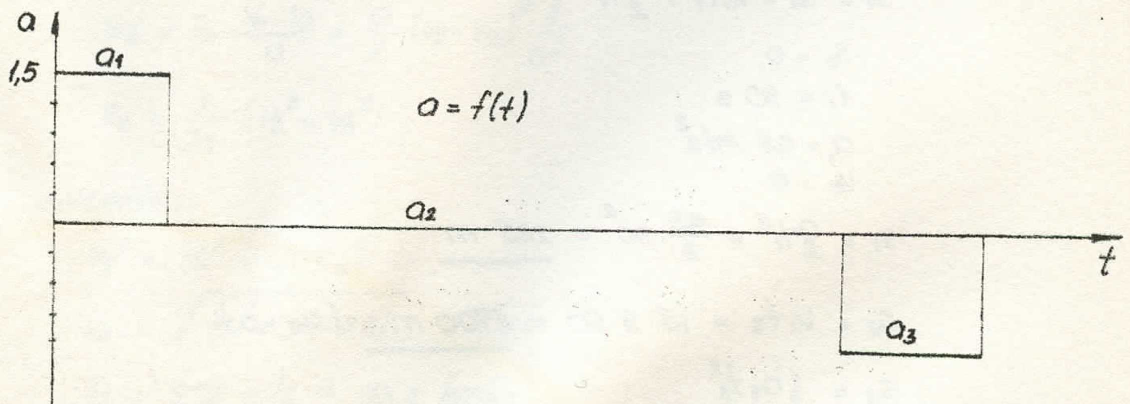
$$s_u = \frac{30 \cdot 15}{2} + 180 \cdot 15 + \frac{37{,}5 \cdot 15}{2} = 225 + 2700 + 282$$

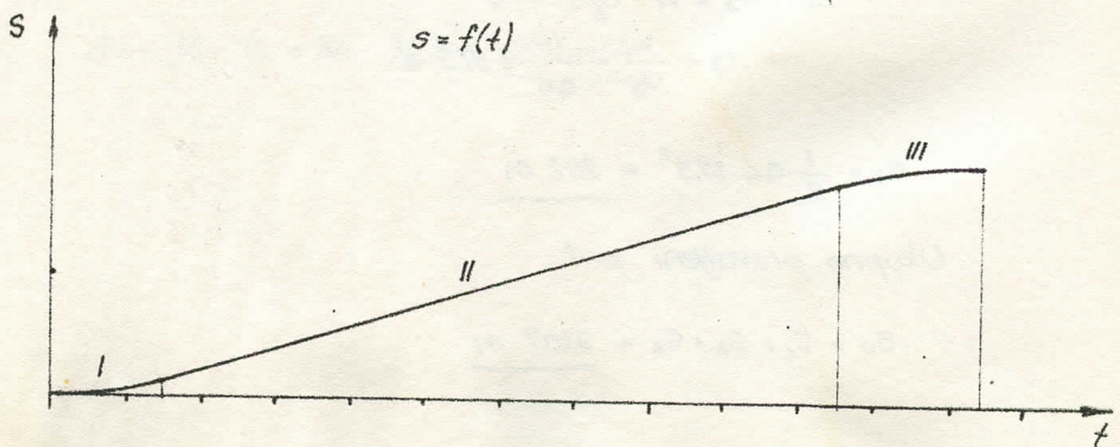
$$s_u = 3207 \text{ m}$$

3) $t_u = t_1 + t_2 + t_3 = 30 + 180 + 37{,}5 = 247{,}5$ sek

4)







ZADATAK 5

Koju brzinu ima vagon koji uslijed retardacije od o,3 m/s[2] vozi još 12 m?
Koliko vremena treba da se vagon zaustavi?
Kako izgleda dijagram puta i vremena?

Rješenje:

Za jednoliko usporeno gibanje

$V = V_0 - at$ .... (1)

$s = s_0 + V_0 t - \frac{a}{2}t^2$ .... (2)

$V = 0$

$s_0 = 0$

iz (1) → $V_0 = at$ i uvršteno u (2) slijedi

$s = at \cdot t - \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}t^2$

pa je potrebno vrijeme za zaustavljanje

$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{0,3}} = 8,94$ sek

odnosno brzina vagona u trenutku kočenja

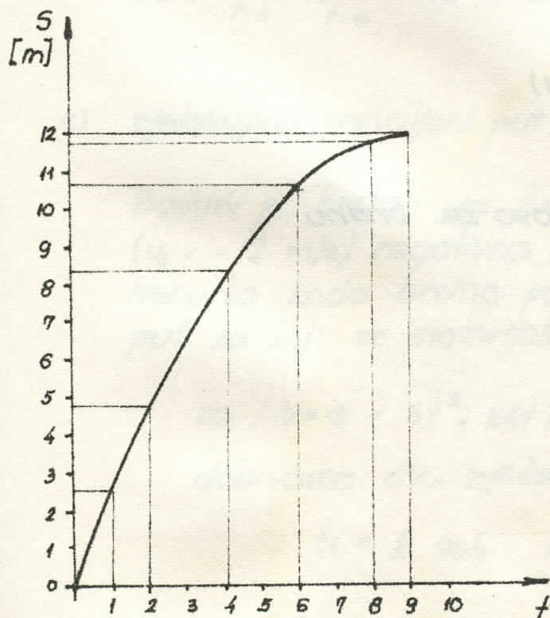
$V_0 = at = 0,3 \cdot 8,94 = 2,68$ m/s

Dijagram puta i vremena

Prema izrazu (2)

$s = V_0 t - \frac{a}{2}t^2 = 2,68\,t - 0,15\,t^2$

t	s
0	0
1	2,53
2	4,76
4	8,32
6	10,68
8	11,84
8,94	12



ZADATAK 6

Zakon ubrzanja materijalne točke koja se giba po pravocrtnoj vertikalnoj putanji zadan je jednadžbom

$$a = 6t - 24$$

U trenutku:

t = 0 tačka se nalazi 4 m ispod ishodišta
t - 3s tačka se nalazi 23 m iznad ishodišta

Vektor ubrzanja u trenutku t=5s ima smjer pozitivne ordinatne osi (y).
Potrebno je odrediti:

a) brzinu u trenutku t-3s
b) međusobni razmak položaja tačke za t= 0 i t=4s
c) cjelokupni prevaljeni put tačke u intervalu od t=0 i t=4s
d) nacrtati dijagrama a f(t), v=f(t) i s=f(t)

Rješenje:

a) brzina za t=3 s

premo izrazu za nejednoliko gibanje, ubrzanje je

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 24$$

a separacijom varijabli

$$dv = (6t-24)dt$$

te integriranjem neodređenim integralom

$$v = \int (6t-24)dt + C_1$$

$$v = 3t^2 - 24t + C_1 \quad \cdots \quad (1)$$

Prevaljeni put dobivamo iz odnosa za brzinu

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 24t + C_1$$

$$ds = vdt$$

$$s = \int vdt + C_2$$

$$s = \int (3t^2 - 24t + C_1)\,dt + C_2$$

$$s = t^3 - 12t^2 + C_1 t + C_2 \quad \dots (2)$$

Uvjeti:

za $t = 0 \rightarrow s = -4$ m $\rightarrow$ iz (2) $\rightarrow C_2 = -4$

za $t = 3$ s $\rightarrow s = 23$ m $\rightarrow$ iz (2) $\rightarrow C_1 = 36$

pa je zakon promjene brzine prema (1)

$$v = 3t^2 - 24t + 36$$

a zakon promjene puta prema (2)

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 4$$

te je brzina u trenutku $t = 3$ s

$$v = 3 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 36 = -9 \text{ m/s}$$

b) međusobni razmak točke za $t = 0$ i $t = 4$ s

$$s_{t=0} = -4 \text{ m}$$

$$s_{t=4s} = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 - 4 = 12 \text{ m}$$

$$\Delta s = s_{t=4} - s_{t=0} = 12 - (-4) = 16 \text{ m}$$

c) cjelokupno prevaljeni put

Budući je brzina za $t = 0$ ($v_{t=0} = 36$ m/s) pozitivna, a za $t = 4$ s ($v_4 = -12$ m/s) negativna, to ćemo prvo računati prijeđeni put do trenutka kada brzina postaje jednaka 0, a zatim ćemo dodati put za koji se materijalna točka spušta.

za $v = 0 = 3t^2 - 24t + 36$

dobivamo dva rješenja:

$t_1 = 2$ sek i $t_2 = 6$ sek

a interesira nas samo prvo.

Prema tome je za $t_1 = 2$ sek tačka udaljena od ishodišta za

$$s_{t=2} = 2^3 - 12\cdot 2^2 + 36\cdot 2 - 4 = 28\ m$$

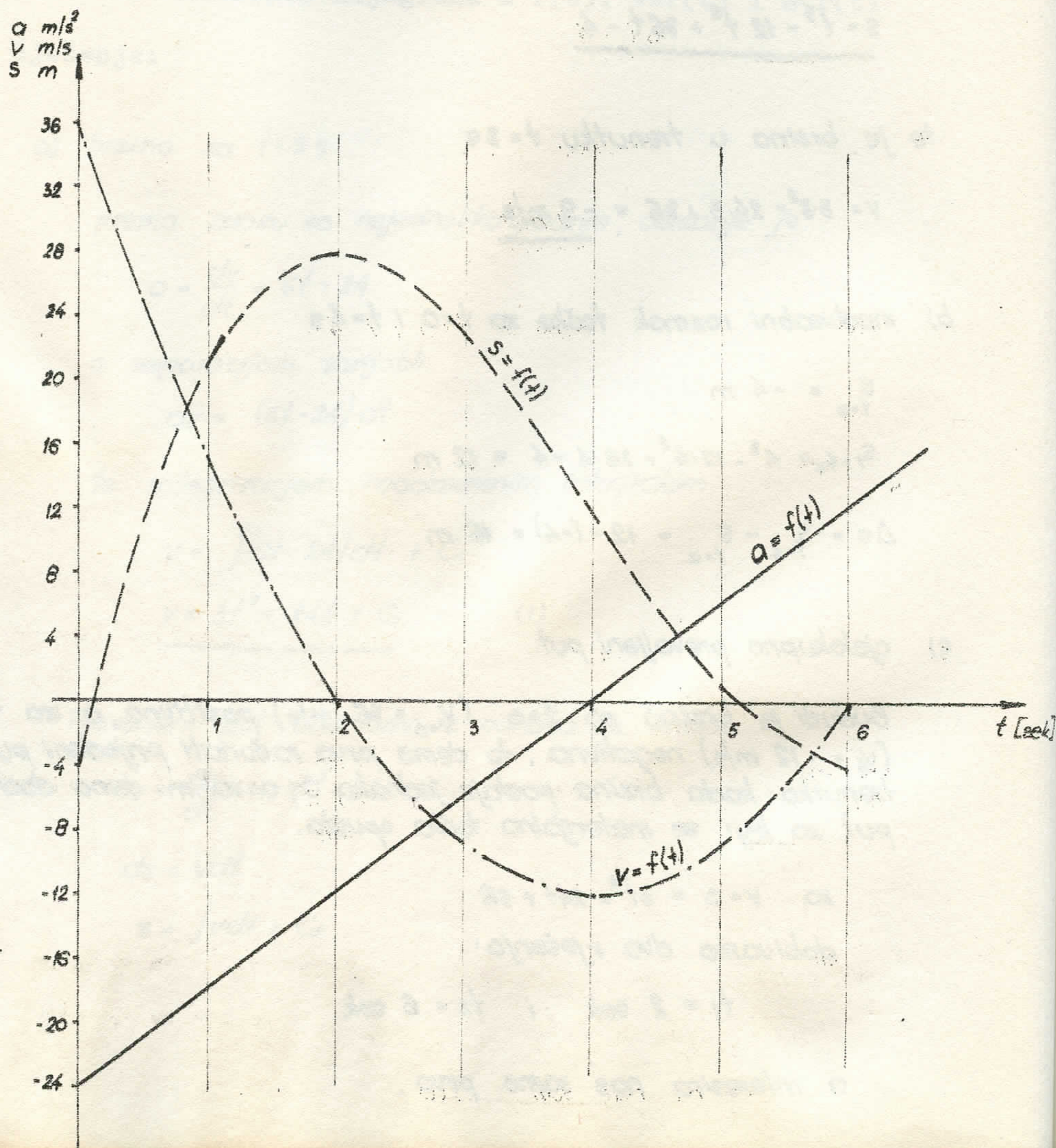
a za $t = 4$ sek

$s_{t=4} = 12\ m$ iznad ishodišta

Ukupno prevaljeni put

$$s_U = s_{t=0} + s_{t=2} + (s_{t=2} - s_{t=4})$$

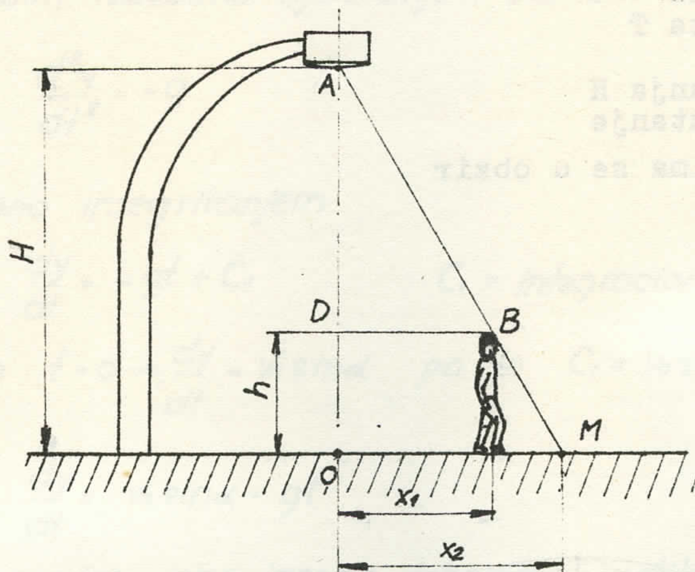
$$s_U = 4 + 28 + (28 - 12) = 48\ m$$



ZADATAK 7

Čovjek visine h udaljuje se brzinom v_1 od lampe koja se nalazi na visini H (prema slici).

Kojom se brzinom kreće kraj njegove sjenke?



Rješenje:

Iz sličnosti trokuta OAM i DAB nalazimo

$$\Delta\, OAM \sim \Delta\, DAB$$

$$x_2 : H = x_1 (H-h)$$

$$x_2 = \frac{H}{H-h}\, x_1$$

a brzina je općenito prva derivacija puta po vremenu, tj

$$v = \frac{dx}{dt}$$

pa deriviranjem gornjeg izraza po varijabli t, dobivamo

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{H}{H-h}\,\frac{dx_1}{dt}$$

odnosno

$$v_2 = \frac{H}{H-h}\, v_1 = \frac{1}{1-\frac{h}{H}}\, v_1$$

za $H = h \Rightarrow v_2 \rightarrow \infty$

$H \rightarrow \infty \Rightarrow v_2 \rightarrow v_1$

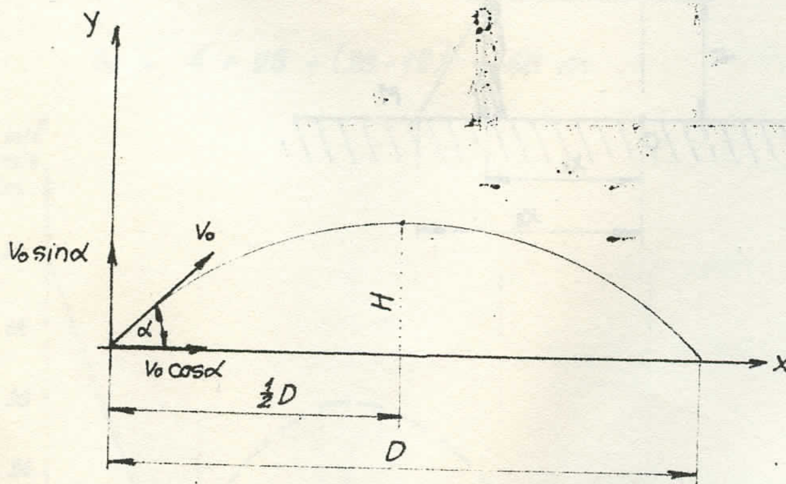
B) KRIVOCRTNO GIBANJE

ZADATAK 8

Projektil je izbačen iz cijevi vatrenog oružja početnom brzinom v_0 pod kutem elevacije α (prema slici).
Potrebno je odrediti:

a) trajanje leta T
b) domet D
c) visinu penjanja H
d) jednadžbu putanje

Otpor uzduha ne uzima se u obzir



Rješenje:

Vektor početne brzine v_0 rastavljamo u vertikalnu i horizontalnu komponentu

$$v_x = v_0 \cos\alpha = konst$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha$$

pri čemu je horizontalna brzina konstantna, dok se veličina vertikalne komponente mijenja djelovanjem sile teže.

Prema tome, horizontalni put prevaljen u vremenu t dobivamo iz

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$$

i odavde

$$dx = v_0 \cos\alpha \, dt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \ldots \quad (1)$$

Prevaljeni put u vertikalnom smjeru u vremenu t

Iz relacije za ubrzanje (usmjereno prema dolje, tj. s negativnim predznakom) izazvano djelovanjem sile teže dobivamo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

odnosno integriranjem

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1 \qquad C_1 = \text{integraciona konstanta}$$

za $t = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = V_0 \sin\alpha$ pa je $C_1 = V_0 \sin\alpha$

$$\frac{dy}{dt} = V_0 \sin\alpha - gt$$

Integriranjem ovog izraza dobivamo vertikalni put u vremenu t:

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

za $t = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

pa imamo

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

a) trajanje leta T

Udarom projektila u zemlju (točka A) vrijednost $y = 0$ pa iz izraza (2) dobivamo

$$V_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

ili $t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = T \quad \ldots\ldots (3)$

b) domet D

Uvrštenjem izraza (3) u (1) slijedi

$$D = X_{max} = V_0 \cdot T \cos\alpha = V_0 \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha$$

$$D = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

c) visina penjanja H

za $t = \frac{1}{2}T \Rightarrow y = y_{max}$

pa iz (2)

$$H = v_0 \frac{1}{2} T \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{1}{2}T\right)^2$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

d) jednadžba putanje

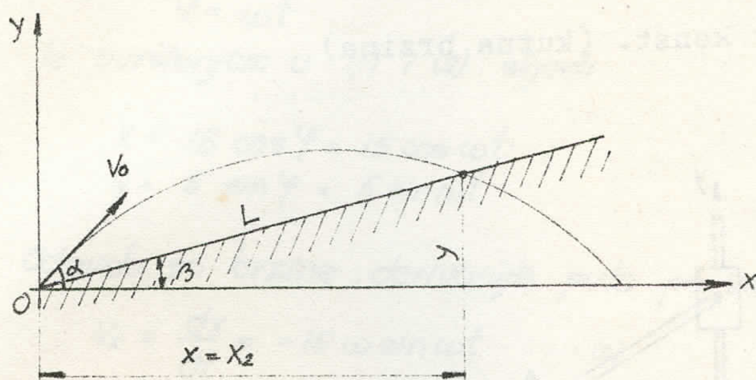
- eliminiranjem varijable t iz jednadžbe (1) i (2) dobivamo:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \sin^2\alpha}$$

a to je parabola

ZADATAK 9

Potrebno je izračunati domet L na nagnutoj ravnini koji bi imao projektil ispaljen iz točke O početnom brzinom v_0 i pod kutem elevacije α ako je zadan i kut β ravnine.



Rješenje:

Iz prethodnog zadatka

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

odnosno

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \ldots (1)$$

Jednadžba pravca koji određuje nagnutu ravninu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \operatorname{tg}\beta \quad \ldots (2)$$

Izjednačenjem izraza (1) i (2) dobivamo horizontalnu udaljenost udara projektila u ravninu pod kutem β.

$$x \operatorname{tg}\beta = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

i odavde

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g} (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$$

a domet L

$$L = \frac{x_2}{\cos\beta}$$

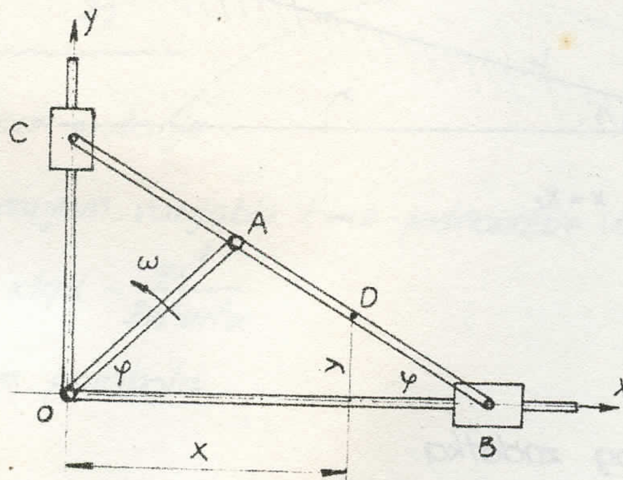
$$L = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g \cos\beta} (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$$

ZADATAK 1o

Zadana je shema elipsografa (instrument za crtanje elipsa) prema slici. Treba naći jednadžbe putanje i hodografa brzina tačke D (analitički i grafički).
Zadano je

$\overline{OA}$ = 1o cm $\overline{OA} = \overline{AC}$
$\overline{BC}$ = 2o cm $\overline{BD}$ = 5 cm

ω = konst. (kutna brzina)



Rješenje:

a) *Jednadžba putanje tačke D(x,y):*

$$x = 2 \cdot 10 \cos\varphi - 5 \cos\varphi$$
$$x = 15 \cos\varphi \quad \dots (1)$$
$$y = 5 \sin\varphi \quad \dots (2)$$

kvadriranjem i zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo jednadžb elipse, tj:

$$x^2 = 225 \cos^2\varphi$$
$$y^2 = 25 \sin^2\varphi$$

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad \text{putanja je elipsa}$$

b) Jednadžba hodografa brzina

Iz izraza za kutnu brzinu

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

dobivamo trenutnu vrijednost kuta φ

$$\varphi = \omega t$$

te uvrštenjem u (1) i (2) slijedi

$$x = 15 \cos\varphi = 15 \cos\omega t$$
$$y = 5 \sin\varphi = 5 \sin\omega t$$

Odavde su brzine derivacije puta po vremenu t

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -15\,\omega \sin\omega t \quad \ldots (3)$$

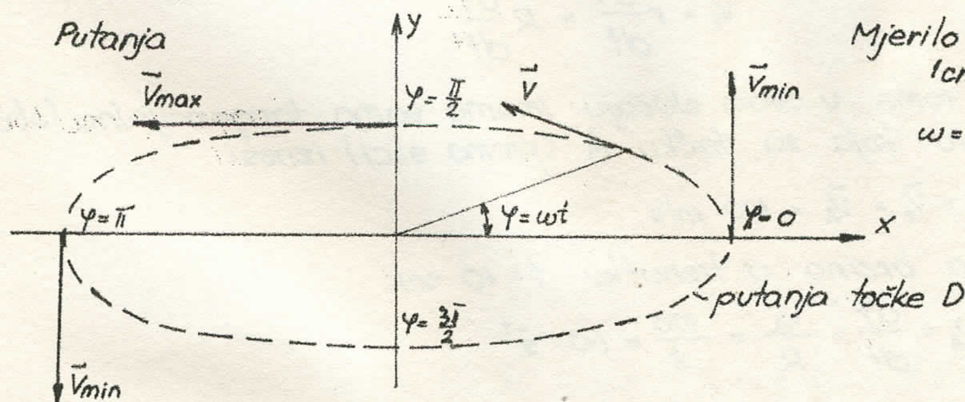
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 5\,\omega \cos\omega t \quad \ldots (4)$$

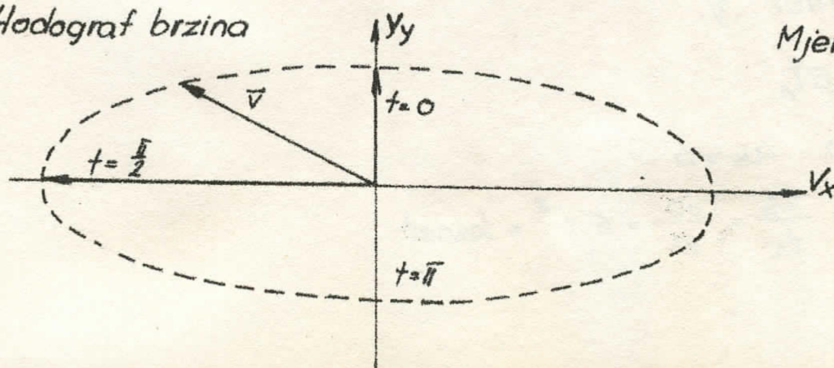
kvadriranjem i zbrajanjem (3) i (4) dobivamo

$$\frac{v_x^2}{225\,\omega^2} + \frac{v_y^2}{25\,\omega^2} = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

$$\frac{v_x^2}{225\,\omega^2} + \frac{v_y^2}{25\,\omega^2} = 1 \quad \text{hodograf brzina je elipsa}$$

GRAFIČKI:

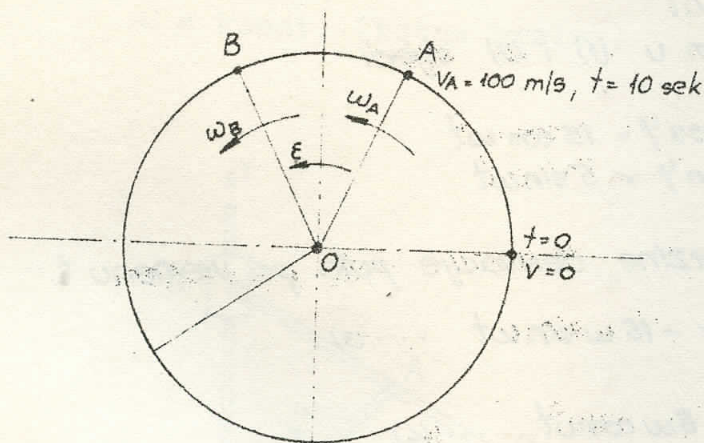




ZADATAK 11

Zamašnjak polumjera R=2o m okrećući se jednoliko ubrzano iz stanja mirovanja u toku lo sek ima na svom obodu brzinu v=1oo m/s.

Treba naći brzinu, normalno i tangencijalno ubrzanje tačke na obodu zamašnjaka u trenutku t_2 = 15 sek.



Rješenje:

Općenito brzina točke na zakrivljenoj putanji jednaka je vektorskom zbroju relativne (u smjeru **radijusa**) i tangencijalne brzine, tj.

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_t$$

Prema definiciji $\vec{V}_r = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dR}{dt} = 0$ jer je R = konst

$$\vec{V}_t = r\frac{d\varphi}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

Prema tome u ovom slučaju imamo samo tangencijalnu (obodnu) komponentu koja za tačku A (prema slici) iznosi

$$\vec{V} = \vec{V}_t = \vec{V}_A = 100 \text{ m/s}$$

a kutna brzina u trenutku $t = 10$ sek

$$\omega_A = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_A}{R} = \frac{100}{2} = 50 \ s^{-1}$$

kutno ubrzanje ε dobivamo iz izraza za jednoliko ubrzano gibanje po kružnici, tj.

$$\omega_A = \omega_0 + \varepsilon t_A$$

za $t = 0$ $\omega_0 = 0$

pa je $\varepsilon = \dfrac{\omega_A}{t_A} = \dfrac{50}{10} = 5 \ s^{-2}$ = konst

Za točku B kutna brzina iznosi:

$$\omega_B = \omega_0 + \varepsilon t_B$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_B = 5 \cdot 15 = 75 \ s^{-1}$$

a obodna brzina

$$v_B = R\omega_B = 2 \cdot 75 = 150 \ m/s$$

Ubrzanje u točki B:

Normalno

$$a_n = R\omega_B^2 = 2 \cdot 75^2 = 11250 \ m/s^2$$

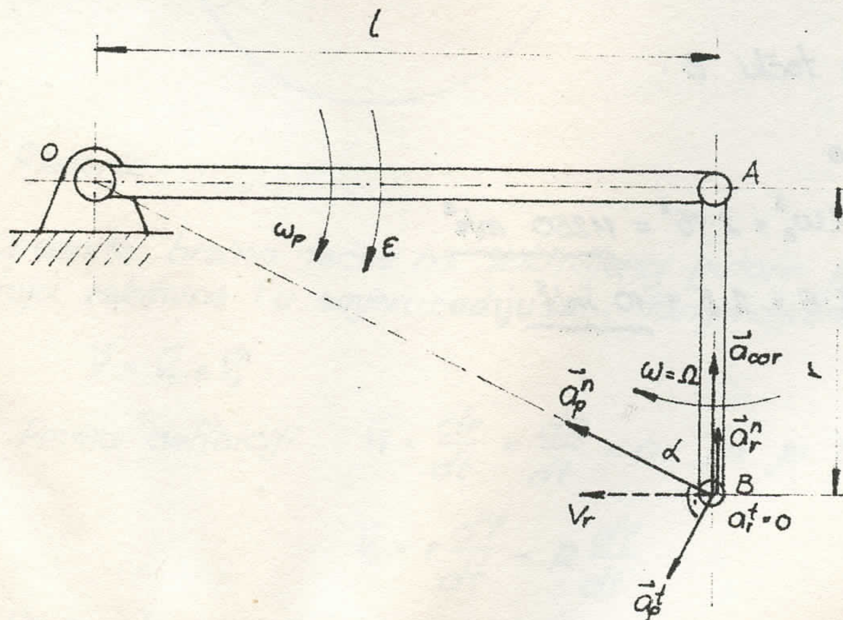
$$a_t = R \cdot \varepsilon = 2 \cdot 5 = 10 \ m/s^2$$

ZADATAK 12

Štap OA dužine ℓ=6o cm rotira u smjeru kazaljke na satu apsolutnom kutnom brzinom ω =3 s^{-1} i apsolutnim kutnim ubrzanjem ε = 4 s^{-2}.

Kraći štap AB, dužine r=3o cm, rotira istovremeno oko A jednoliko relativnom kutnom brzinom Ω = 5 s^{-1} u smjeru kazaljke na satu.

Potrebno je odrediti apsolutno linearno ubrzanje tačke B pomoću Coriolisovog zakona i kontrolirati pomoću zakona relativnih ubrzanja (za položaj prikazan prema slici).



Rješenje:

I. PO CORIOLISOVOM ZAKONU

Apsolutno ubrzanje tačke B dobije se po Coriolisu kao vektorska suma:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_p^n + \vec{a}_p^t + \vec{a}_{cor}$$

Pojedini članovi ove sume znače:

1. $\vec{a}_r^n$ - normalno ubrzanje tačke B zbog relativne rotacije oko A kutnom brzinom Ω ($\vec{a}_r^n \parallel AB$ i usmjereno od B prema A)

$$\vec{a}_r^n = r \cdot \Omega^2 = 0{,}3 \cdot 5^2 = \underline{7{,}5 \ m/s^2}$$

2. $\vec{a}_r^{\,t}$ - tangencijalno ubrzanje B zbog relativne rotacije oko A kutnim ubrzanjem ε_{AB}

$$\vec{a}_r^{\,t} = r \cdot \varepsilon_{AB} = 0 \quad \text{jer je } \varepsilon_{AB} = 0$$

3. $\vec{a}_p^{\,n}$ - prenosno normalno ubrzanje (∥ OB, usmjereno od B prema O)

$$\vec{a}_p^{\,n} = \rho\,\omega_p^2 = \sqrt{r^2 + l^2} \cdot \omega_p^2 = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}3^2} \cdot 3^2 = \underline{6{,}04 \; m/s^2}$$

4. $\vec{a}_p^{\,t}$ - prenosno tangencijalno ubrzanje (⊥ OB, usmjereno od B u smjeru vrtnje)

$$a_p^{\,t} = \rho \cdot \varepsilon = \sqrt{l^2 + r^2} \cdot \varepsilon = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}3^2} \cdot 4 = \underline{2{,}68 \; m/s^2}$$

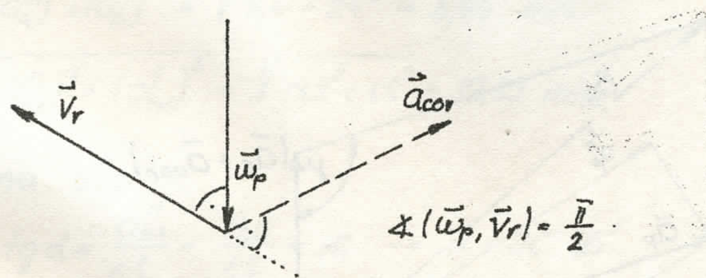
5. $\vec{a}_{cor}$ - Coriolisovo ubrzanje (∥ AB i okomito na v_r, usmjereno od B prema A)
   - Pravac i smjer Coriolisova ubrzanja nalazimo na slijedeći način: pravac vektora a_{cor} je uvijek okomit na v_r, a smjer mu je određen smjerom vektora v_r zaokrenutog za 90° u smislu rotacije.

$$\vec{a}_{cor} = 2(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r) = 2\,\omega_p v_r \sin(\omega_p, v_r) = 2\,\omega_p v_r \sin\frac{\pi}{2} = 2\,\omega_p v_r$$

$$v_r = r\,\Omega = 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}5 \; m/s$$

$$\vec{a}_{cor} = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = \underline{9 \; m/s^2}$$

Postanak Coriolisova ubrzanja



Vektorskim zbrajanjem dobivamo:

$$|\vec{a}_r| = \sqrt{(a_r^n)^2 + (a_r^t)^2} = a_r^n = 7{,}5 \; m/s^2$$

$$|\vec{a}_p| = \sqrt{(a_p^n)^2 + (a_p^t)^2} = \sqrt{6{,}04^2 + 2{,}68^2} = 6{,}6 \; m/s^2$$

$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n}$ i $\vec{a}_{cor}$ su kolinearni pa se linearno zbrajaju, tj:

$$(\vec{a}_r + \vec{a}_{cor}) = 7{,}5 + 9 = 16{,}5 \; m/s^2$$

Vektorskim zbrajanjem $\vec{a}_p$ i $(\vec{a}_r + \vec{a}_{cor})$ dobivamo $\vec{a}_B$

Primjenom kosinusovog poučka

$$\vec{a}_B^{\,2} = \vec{a}_p^{\,2} + (\vec{a}_r + \vec{a}_{cor})^2 - 2\vec{a}_p(\vec{a}_r + \vec{a}_{cor})\cos\gamma$$

$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ ... kut između $\vec{a}_B$ i $(\vec{a}_r + \vec{a}_{cor})$

Prema slici

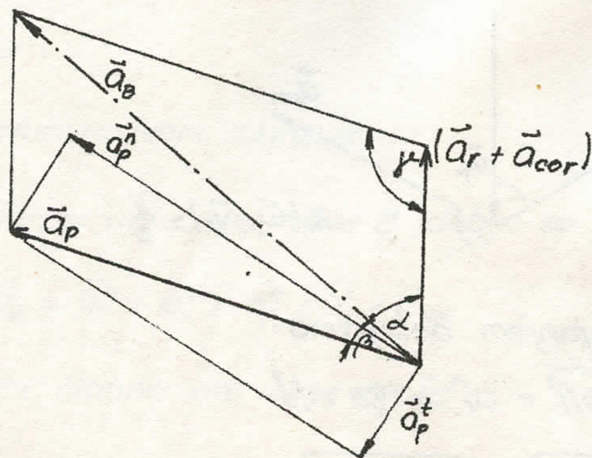
$$tg\alpha = \frac{l}{r} = \frac{60}{30} = 2 \rightarrow \alpha = 63°30'$$

$$tg\beta = \frac{\vec{a}_p^{\,t}}{\vec{a}_p^{\,n}} = \frac{268}{6,04} = 0,443 \rightarrow \beta = 23°$$

pa je $\gamma = 93°30' \rightarrow \cos\gamma = \cos(90 + 3°30') = -\sin 3°30' = 0,061$

$$\vec{a}_B^{\,2} = 6,6^2 + 16,5^2 + 2 \cdot 6,6 \cdot 16,5 \cdot \sin 3°30' = 329,09$$

$$\vec{a}_B = 18,14 \ m/s^2$$



II. RJEŠENJE METODOM RELATIVNIH UBRZANJA

Apsolutno ubrzanje točke B po ovoj metodi se dobije kao vektorska suma:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

Pojedini članovi ove sume znače:

1. $\vec{a}_A^n$ = normalno ubrzanje točke A kod rotacije oko O (∥ OA, usmjereno od A prema O).

$$\vec{a}_A^n = l \cdot \omega_p^2 = 0{,}6 \cdot 3^2 = 5{,}4 \ m/s^2$$

2. $\vec{a}_A^t$ = tangencijalno ubrzanje točke A kod rotacije oko O (⊥ OA, usmjereno od A prema B)

$$\vec{a}_A^t = l \cdot \varepsilon = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4 \ m/s^2$$

3. $\vec{a}_{BA}^n$ = relativno normalno ubrzanje B u odnosu na A (∥ AB, usmjereno od B prema A)

$$\vec{a}_{BA}^n = r\,(\Omega + \omega)^2 = 0{,}3\,(5+3)^2 = 19{,}2 \ m/s^2$$

4. $a_{BA}^t = r\,(\varepsilon + \varepsilon_{BA}) = 0{,}3\,(4+0) = 1{,}2 \ m/s^2$

relativno tangencijalno ubrzanje točke B prema A (⊥ AB, usmjereno od B u smjeru vrtnje)

Vektorskim zbrajanjem dobivamo

$$\overline{a}_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = \sqrt{5{,}4^2 + 2{,}4^2} = 5{,}96 \ m/s^2$$

$$\overline{a}_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^t)^2} = \sqrt{19{,}2^2 + 1{,}2^2} = 19{,}23 \ m/s^2$$

Prema slici:

$$tg\,\alpha = \frac{a_{BA}^n}{a_{BA}^t} = \frac{19{,}2}{1{,}2} = 16 \ \rightarrow \ \alpha = 86°25'$$

$$tg\,\beta = \frac{a_A^t}{a_A^n} = \frac{2{,}4}{5{,}4} = 0{,}44 \ \rightarrow \ \beta = 23°45'$$

$$\alpha + \beta = 110°10'$$

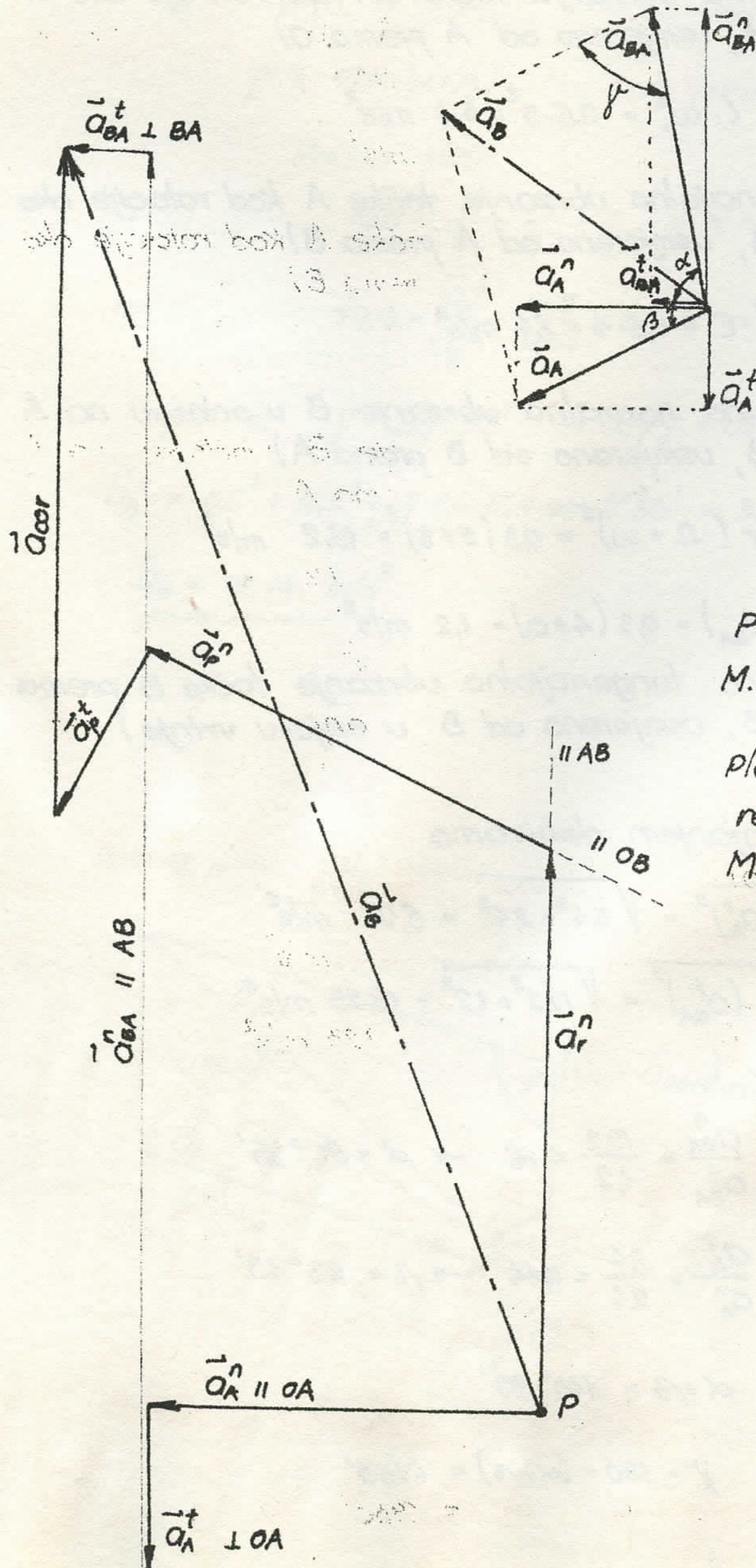
$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 69°50'$$

Po kosinusovom poučku

$$a_B^2 = a_A^2 + a_{BA}^2 - 2a_A a_{BA} \cos\gamma$$

$$a_B^2 = 5{,}96^2 + 19{,}23^2 - 2 \cdot 5{,}96 \cdot 19{,}23 \cdot \cos 69°50'$$

$$a_B \cong 18{,}1 \ m/s^2$$



Plan ubrzanja po Coriolisu
M. 1cm $\hat{=}$ 1 m/s²

plan ubrzanja po metodi relativnih ubrzanja
M. 1cm $\hat{=}$ 1 m/s²

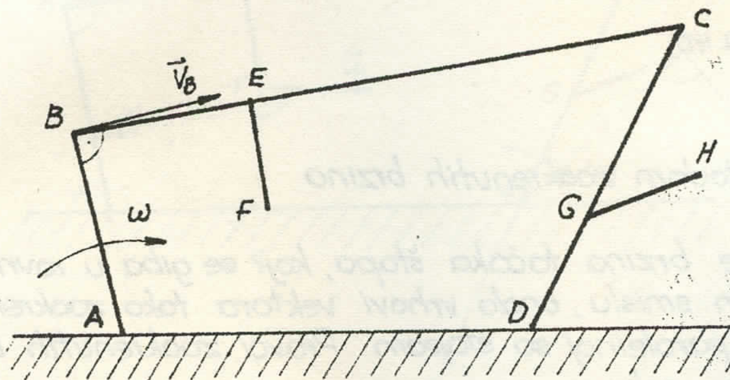
$a_B = 18 \ m/s^2$

ZADATAK 13

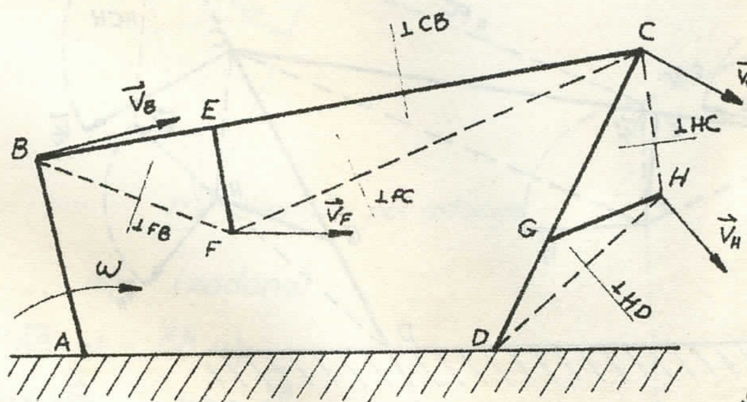
Zadan je zglobni četverokut prema slici i brzina tačke B. Potrebno je odrediti brzine tačaka F i H

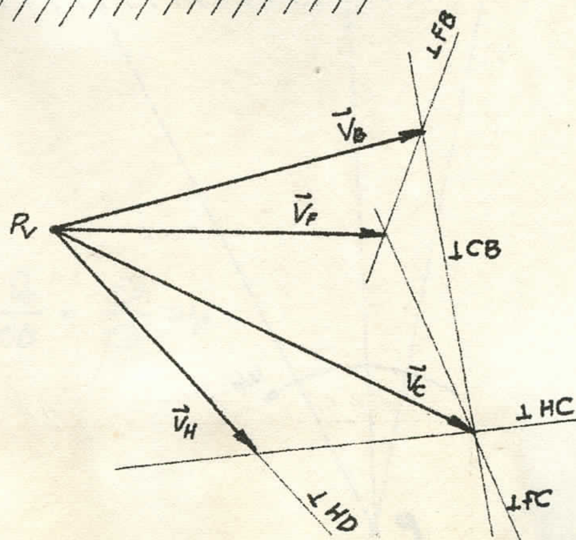
a) pomoću plana brzina
b) metodom zaokrenutih brzina
c) metodom trenutnih polova
d) metodom projiciranih brzina

Dimenzije uzeti po volji.



a) Rješenje pomoću plana brzina





$\vec{V}_A = 0$

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$
$\perp CB \qquad \perp CB$

$\vec{V}_F = \vec{V}_B + \vec{V}_{FB}$
$\perp FB$

$\vec{V}_F = \vec{V}_C + \vec{V}_{FC}$
$\perp FC$

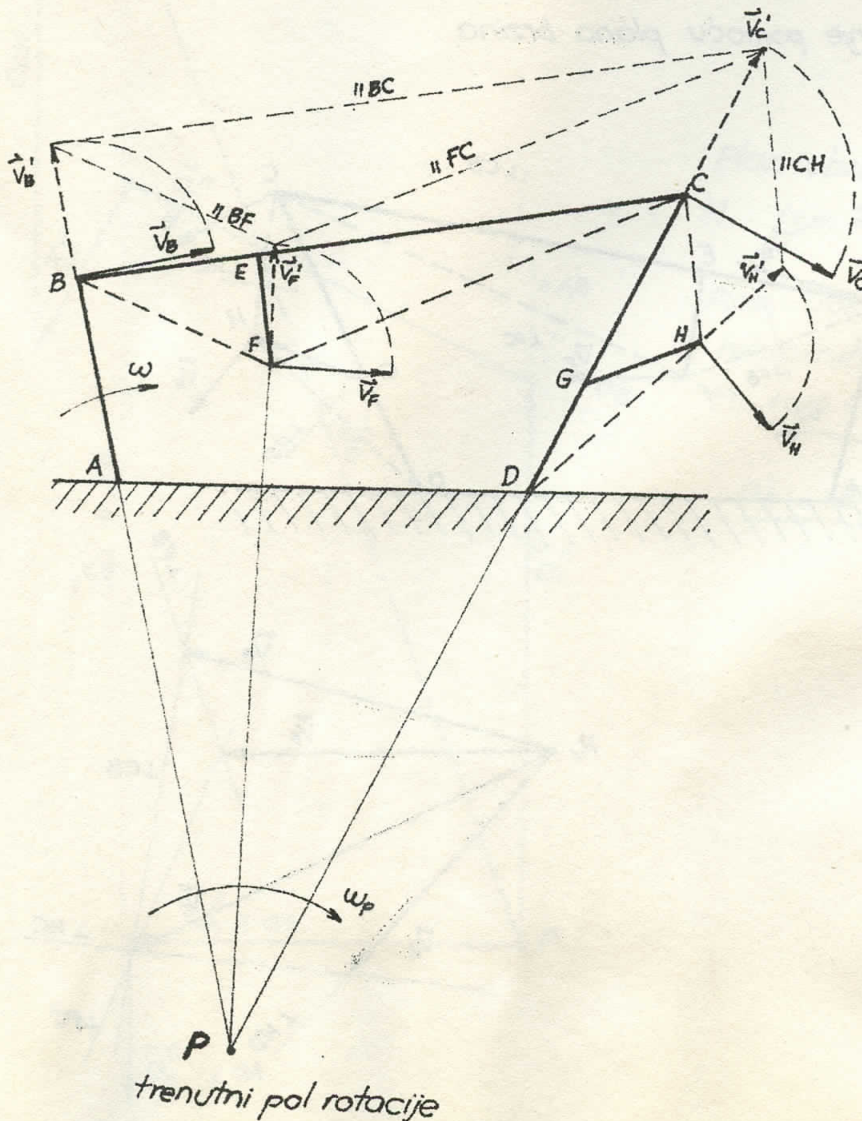
$\vec{V}_H = \vec{V}_C + \vec{V}_{HC}$
$\perp HC$

$\vec{V}_H = \vec{V}_D + \vec{V}_{HD}$
$\perp HD$

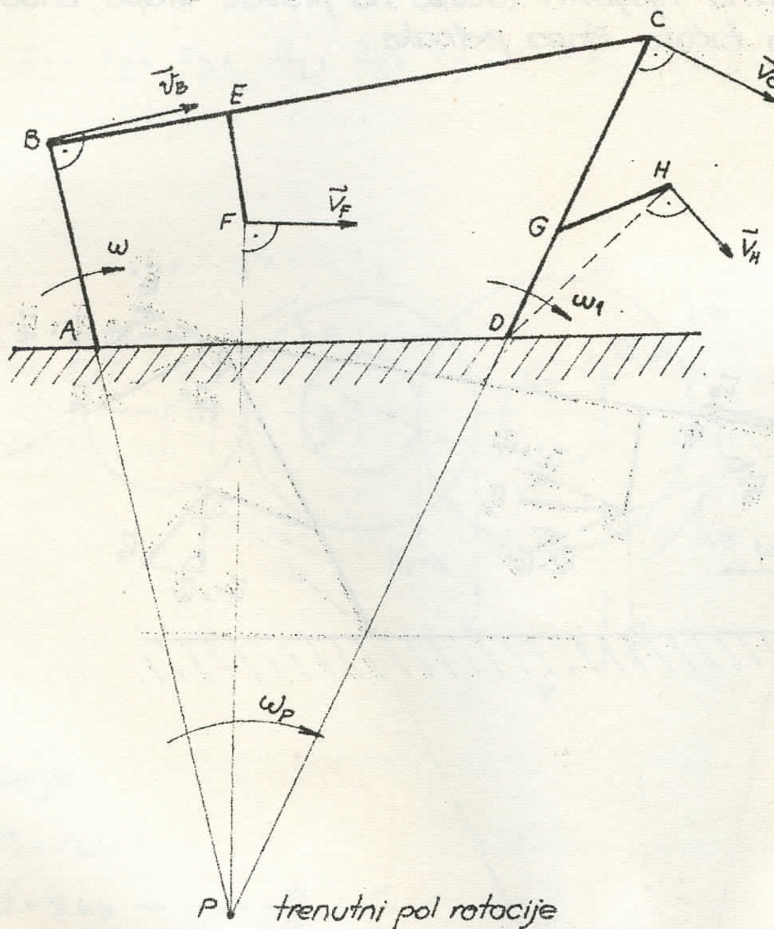
$\vec{V}_D = 0$

b) *Rješenje metodom zaokrenutih brzina*

Ako vektore brzina tačaka štapa, koji se giba u ravnini, zakrenemo za 90° u istom smislu, onda vrhovi vektora tako zaokrenutih brzina leže na liniji paralelnoj sa štapom. Pravci zaokrenutih brzina sijeku se u trenutnom polu.



c) Rješenje metodom trenutnih polova



P trenutni pol rotacije

$\vec{V}_B = \ldots\ m/s$ (zadano)

$\vec{V}_B = \overline{AB} \cdot \omega = \overline{BP} \cdot \omega_P$

$$\omega = \frac{\vec{V}_B}{\overline{AB}} \qquad \omega_P = \frac{\vec{V}_B}{\overline{BP}}$$

$\vec{V}_F = \overline{FP} \cdot \omega_P$

$\vec{V}_C = \overline{CP} \cdot \omega_P$

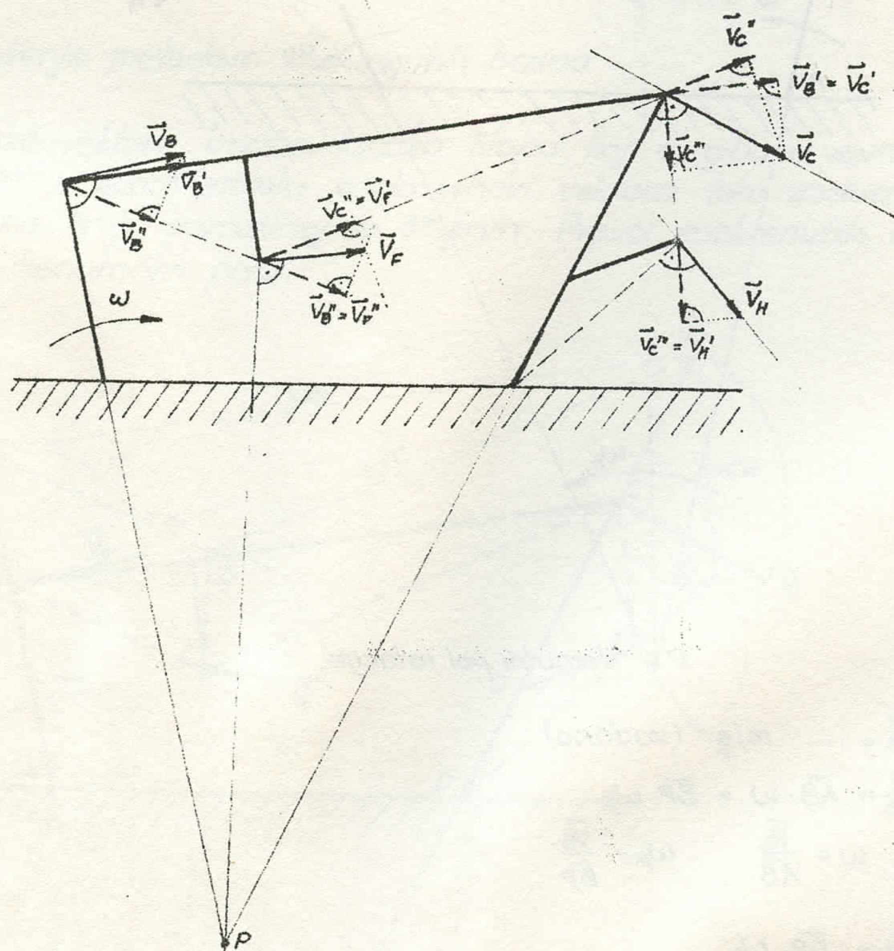
$\vec{V}_H = \overline{HD} \cdot \omega_1$

$$\vec{V}_C = \overline{CD}\, \omega_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{\vec{V}_C}{CD} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}\, \omega_P$$

$$\vec{V}_H = \overline{HD}\, \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}\, \omega_P$$

d) Rješenje metodom projiciranih brzina

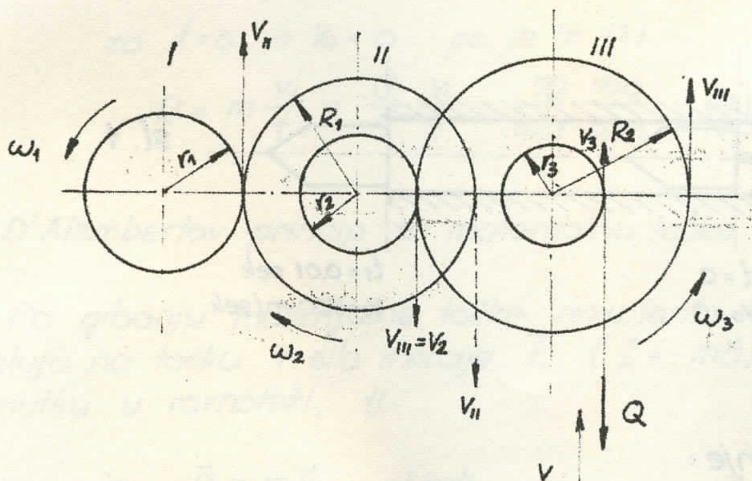
Ako pri gibanju štapa u ravnini projiciramo u istom trenutku vektore brzina njegovih točaka na pravac štapa, onda su projekcije brzina svih točaka štapa jednake.



ZADATAK 14

Na elektromotor je učvršćen zupčanik I i okreće posredstvom sistema zupčanika vitlo III na kojem je obješen teret Q. Koliki mora biti broj okretaja elektromotora da bi se teret podizao brzinom V ako je zadano:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ R_1,\ R_2,\ v_3 = v$$



Rješenje:

$n_1 = n_{el} = ?$

$$V_3 = r_3\,\omega_3 \rightarrow \omega_3 = \frac{V_3}{r_3} = \frac{V}{r_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{III} = R_2 \cdot \omega_3 \\ V_2 = V_{III} = r_2\,\omega_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_2}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \rightarrow \omega_2 = \frac{R_2}{r_2}\,\omega_3 = \frac{R_2}{r_2}\,\frac{V}{r_3}$$

$$V_{II} = R_1\,\omega_2$$

$$V_1 = V_{II} = r_1\,\omega_1 = r_1\,\frac{\pi n_1}{30} \rightarrow n_1 = \frac{30\,V_1}{\pi r_1} = \frac{30}{\pi r_1}\,R_1\,\omega_2$$

$$n_1 = \frac{30\,R_1 R_2 V}{\pi\, r_1 r_2 r_3} = n_{el}$$

D I N A M I K A

ZADATAK 1

Projektil težine G=7o N izlazi iz cijevi brzinom v_1=7oo m/sek, gibajući se kroz cijev u toku o,ol sek (sl.1).
Potrebno je odrediti pritisak barutnih plinova na projektil u cijevi i to:

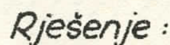
a) primjenom II. Newtonovog zakona
b) primjenom zakona količine gibanja - zakona impulsa
c) D`Alambertovim principom

R

sl. 1

$t=0$
$v_0=0$

$t_1=0{,}01$ sek
$v_1=700$ m/sek



Rješenje :

a) *II. Newtonov zakon za materijalnu točku*

Vektorska jednadžba gibanja materijalne točke

$$m\cdot\vec{a}=\vec{R} \quad \ldots\ldots (1)$$

$m=\frac{G}{g}$ $[N\ s^2/m = kg]$ ·· masa promatrane materijalne točke

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ $[m/s^2]$ ···· ubrzanje - " - - " - - " -

$\vec{R}$ $[N]$ ···· sila koja djeluje na materijalnu točku

Brzina za jednoliko ubrzano gibanje po pravcu

$$v_1=v_0+at \quad m/s \quad \ldots\ldots (2)$$

za početne uvjete

$t=0$ i $v_0=0$

a za $t=0{,}01$ sek i $v_1=700$ m/sek iz (2)

$$a=\frac{v_1}{t}=\frac{700}{0{,}01}=70000\ m/s^2$$

pa je pritisak barutnih plinova iz (1)

$$R = m \cdot a = \frac{G}{g} \cdot a = \frac{70}{9{,}81} \cdot 70000 \cong 500 \text{ kN}$$

b) zakon količine gibanja

Ukupna promjena količine gibanja u konačnom intervalu vremena jednaka je impulsu sile u istom intervalu vremena, tj.

$$m v_1 - m v_0 = R \cdot t \qquad (3)$$

za $t = 0 \rightarrow v_0 = 0$ pa je iz (3)

$$R = m \frac{v_1}{t} = \frac{G}{g} \frac{v_1}{t} = \frac{70}{9{,}81} \cdot \frac{700}{0{,}01} \cong 500 \text{ kN}$$

c) D'Alambertov princip za materijalnu točku

Pri gibanju materijalne točke rezultanta $\vec{R}$ sila, koje stvarno djeluju na točku i sila inercije $\vec{I}$ ($\vec{I} = -m\vec{a}$) stoje u svakom trenutku u ravnoteži, tj.

iz $\vec{R} = m \cdot \vec{a}$ slijedi

$\vec{R} + (-m\vec{a}) = 0$ te za $\vec{I} = -m\vec{a}$

$\vec{R} + \vec{I} = 0$ .... jednadžba dinamičke ravnoteže (4)

za navedeni primjer

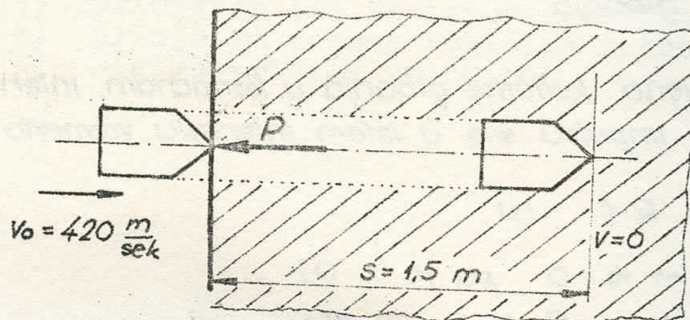
$$\vec{I} = -m\vec{a} = -\frac{G}{g} \cdot \frac{v_1}{t}$$

pa je iz (4)

$$R = -\vec{I} = \frac{G}{g} \frac{v_1}{t} = \frac{70}{9{,}81} \frac{700}{0{,}01} \cong 500 \text{ kN}$$

ZADATAK 2

Projektil težine G=12o N pri udaru u bedem ima brzinu v_o=42o m/sek i pri tome se zabije 1,5 m duboko (sl.2.).



Sl.2.

Potrebno je odrediti srednju veličinu otpora, kojim se bedem opire projektilu.

Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom zakona kinetičke energije, koji glasi:

Pri gibanju materijalne točke u proizvoljnom intervalu vremena promjena kinetičke energije točke jednaka je mehaničkom radu rezultante sila koje djeluju na točku, tj.

$$E - E_o = A$$

ili

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = A = -P \cdot s$$

(utrošeni rad $A = -P \cdot s$)
(dobiveni rad $A = +P \cdot s$)

P ... sila na putu s

u trenutku udara

v_o = 420 m/sek ,

a nakon zabijanja

v = 0 m/sek

pa je

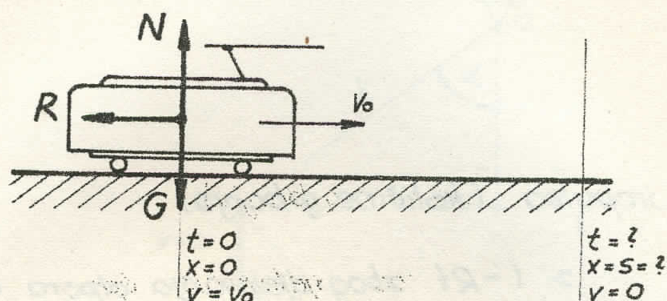
$$-\frac{mv_o^2}{2} = -P \cdot s$$

i odavde veličina otpora

$$P = \frac{mv_o^2}{2s} = \frac{G}{g}\frac{v_o^2}{2s} = \frac{120}{9{,}81} \cdot \frac{420^2}{2 \cdot 1{,}5} \cong 720 \text{ kN}$$

ZADATAK 3

Za koje će se vrijeme i na kojoj udaljenosti uslijed kočenja zaustaviti tramvaj, koji se giba po horizontalnom putu brzinom v_o=36 km/h, ako otpor gibanja pri kočenju iznosi W=2 kN na 1o kN težine tramvaja (sl.3.).



Sl.3.

Rješenje:

a) Primjenom diferencijalne jednadžbe gibanja

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - R$$

(negativni predznak zbog djelovanja otpora pri kočenju u smjeru suprotnog od gibanja tramvaja)

otpor gibanja pri kočenju

$R = W.G$

$R = \frac{2}{1o} .G = o,2.G$ za G[kN] ... ukupna težina tramvaja

pa iz gornjeg izraza dobivamo vrijednost usporenja

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{R}{m} = - \frac{o,2oo\ G}{\frac{G}{g}} = - o,2oo\ g = konst.$$

Za jednoliko usporeno gibanje po pravcu

$v = v_o - at$

- u trenutku kočenja v_o = 36 km/h = 1o m/sek
  a kad tramvaj stane v=o m/sek, pa je vrijeme kočenja

$$t = \frac{v_o}{a} = \frac{v_o}{o,2oo\ g} = \frac{1o}{o,2oo.9,81} = 5,1 \text{ sek}$$

a prevaljeni put

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$s = 10 \cdot 5{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}1^2$$

$$s \cong 25{,}5 \ m$$

b) Primjenom zakona impulsa (količine gibanja)

$$mv - mv_0 = -Rt$$

(−Rt zbog djelovanja otpora u suprotnom smjeru od gibanja tramvaja)

$v_0 = 10$ m/s

$v = 0$ m/s

$m = \frac{G}{g}$

$R = 0{,}2G$

pa je vrijeme potrebno za kočenje

$$t = \frac{mv_0}{R} = \frac{G}{g}\frac{v_0}{0{,}2G} = \frac{v_0}{0{,}2g} \cong 5{,}1 \ sek$$

a prevaljeni put kočenja prema izrazu za jednoliko usporeno gibanje (vidi pod točkom „a")

$$s = 25{,}5 \ m$$

c) Primjenom zakona kinetičke energije

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = -R \cdot s$$

$\frac{mv^2}{2} = 0$ zbog $v = 0$ u trenutku $t = 5{,}1$ sek

pa je prevaljeni put kočenja

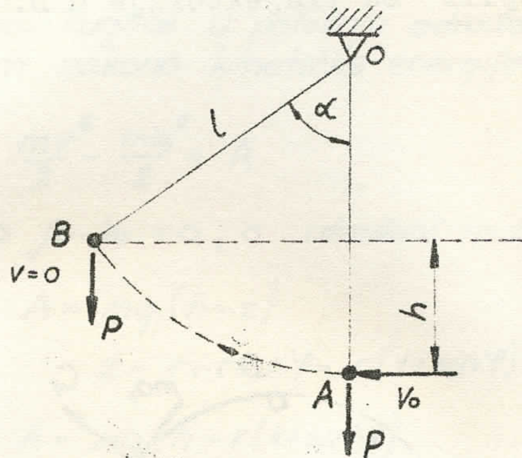
$$s = \frac{mv_0^2}{2R} = \frac{G}{2g}\frac{v_0^2}{0{,}2G} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot g} = \frac{10^2}{0{,}4 \cdot 9{,}81}$$

$$s \cong 25{,}5 \ m$$

ZADATAK 4

Matematsko njihalo dužine l postiglo je u položaju ravnoteže neku horizontalnu brzinu, nakon čega se otkloni od vertikale za kut α. (sl.4.).

Potrebno je naći početnu brzinu njihala.



sl.4

Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom zakona kinetičke energije koji glasi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

U trenutku otklona za kut α brzina $V=0$, a $V_0 = V_{početno}$
Za taj položaj njihalo izvrši rad A

$$A = -P \cdot h = -mgh \quad \text{(utrošeni rad)}$$

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -mgh \quad / : \left(-\frac{m}{2}\right)$$

$$V_0^2 = 2gh$$

iz slike 4. vidimo da je

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$$

pa slijedi

$$V_0^2 = 2gl(1-\cos\alpha) = 4gl\,\frac{1-\cos\alpha}{2} = 4gl\,\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$V_0 = 2\sqrt{gl}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

ZADATAK 5

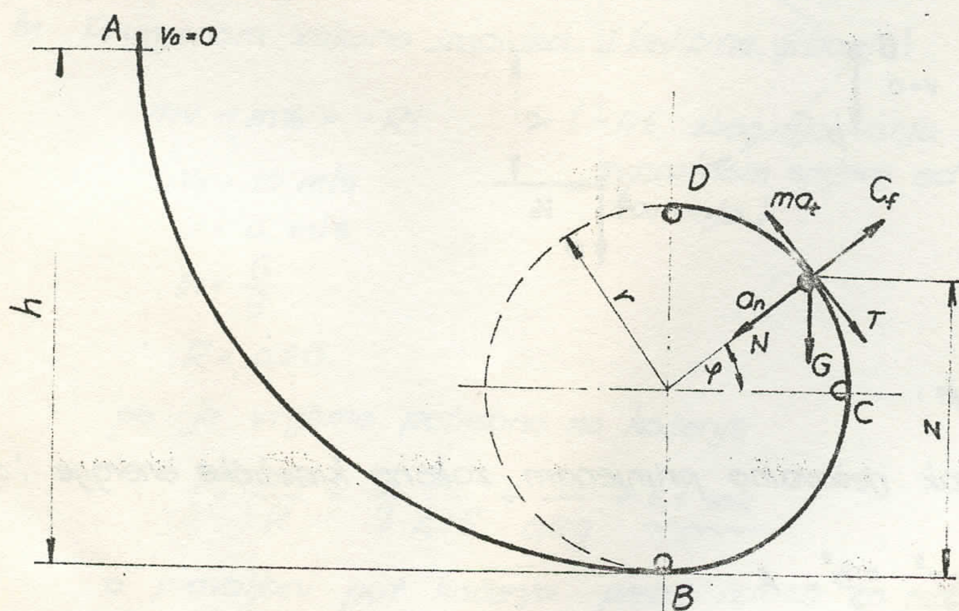
Prisilno gibanje materijalne tačke po konkavnoj putanji

Materijalna točka mase $\underline{m}$ počinje se gibati iz stanja mirovanja iz točke A po trajektoriji ABCD (sl.5).

Potrebno je izračunati normalni pritisak kuglice na trajektoriji u točkama B, C i D, kao i uvjet koji mora biti zadovoljen da bi se točka "odlijepila" od trajektorije u D.

Zadano:

H, r, m



Rješenje:

Sl.5

Za kuglicu u položaju određenim kutem φ nalazimo vrijednost normalnog pritiska N kojim se podloga opire djelovanju centrigugalne sile (d'Alambertova sila) C_f .

Projekcijom svih djelujućih sila na pravac određenim kutem nalazimo:

$$C_f - N - G\sin\varphi = 0 \quad \ldots (1)$$

$$C_f = m a_n = m\frac{v^2}{r} \quad (\text{centrifugalna sila kuglice})$$

$$G = mg \quad (\text{težina kuglice})$$

odnosno traženi normalni pritisak

$$N = C_f - G\sin\varphi = m\frac{v^2}{r} - mg\sin\varphi \quad \cdots\cdots (2)$$

Uvjet da kuglica bude na krivulji:

$$m\frac{v^2}{r} \geq mg\sin\varphi$$

Brzinu kuglice u položaju određenim kutem φ nalazimo primjenom zakona kinetičke energije:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

kako je $v_0 = 0$, a utrošeni rad

$$A = mg(h-z)$$

$$z = r + r\sin\varphi = r(1+\sin\varphi)$$

$$A = mg(h - r(1+\sin\varphi))$$

to je tražena brzina

$$v^2 = 2g(h - r(1+\sin\varphi)) \quad \cdots\cdots (3)$$

odnosno normalni pritisak (uvrštenjem (3) u (2))

$$N = \frac{m}{r}2g(h - r(1+\sin\varphi)) - mg\sin\varphi$$

$$N = 2mg\left(\frac{h}{r} - 1 - \frac{3}{2}\sin\varphi\right) \quad \cdots\cdots (4)$$

Normalni pritisak u pojedinim točkama

Točka B

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$N = 2mg\left(\frac{h}{r} - 1 + \frac{3}{2}\right)$$

$$N = mg\left(2\frac{h}{r} + 1\right)$$

Točka C

$$\varphi = 0 \qquad \sin 0 = 0$$

$$N = mg\left(2\frac{h}{r} - 2\right) = 2mg\left(\frac{h}{r} - 1\right)$$

Točka D

$\varphi = +\frac{\pi}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$N = 2mg\left(\frac{h}{r} - 1 - \frac{3}{2}\right)$

$N = mg\left(2\frac{h}{r} - 5\right)$

Uvjet da bi se kuglica „odlijepila" od trajektorije u točki D je taj da normalni pritisak N ima vrijednost nula, tj. da nema više djelovanja centrifugalne sile C_f.

Prema izrazu (4)

$N = 2mg\left(\frac{h}{r} - 1 - \frac{3}{2}\sin\varphi\right) = 0$

$\frac{h}{r} = 1 + \frac{3}{2}\sin\varphi$

u točki D $\rightarrow$ $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

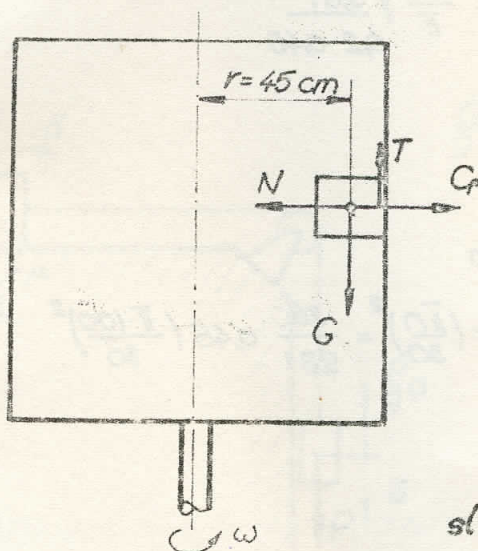
pa je:

$\frac{h}{r} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$h = \frac{5}{2}r = 2{,}5\ r$

ZADATAK 6

Cilindrična posuda rotira oko vertikalne osi konstantnom kutnom brzinom (sl.6). Tijelo težine G=250 N leži na unutarnjoj strani posude, a njegovo klizanje prema dolje sprečava samo sila trenja. Koeficijent statičkog trenja je μ = 0,2.



sl. 6

Potrebno je:

a) izračunati najmanji broj okretaja posude kod koje još ne nastupa klizanje tereta

b) odrediti sile koje djeluju na tijelo pri toj najmanjoj brzini okretanja

Rješenje:

a) Pri okretanju tijela kutnom brzinom ω (u položaju prema sl. 6) javlja se centrifugalna sila C_f koja „priljubljuje" predmet uz unutarnju stijenku posude, uslijed čega se djelovanjem sile trenja T predmet drži u promatranom položaju.

Ucrtavanjem odgovarajućih sila možemo ih izraziti poznatim izrazima:

Normalna sila kojom se posuda opire djelovanju centrifugalne sile C_f (d'Alambertova sila).

$$N = C_f = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mr\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

Sila trenja

$$T = \mu N = \mu \cdot C_f = G \quad \ldots\ldots (2)$$

Uvrštenjem (1) u (2) dobivamo

$$\mu \cdot mr \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = mg$$

i odavde traženi minimalni broj okretaja

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}2 \cdot 0{,}45}}$$

$n \cong 100$ o/min

b) Centrifugalna sila

$$C_f = mr\omega^2 = \frac{G}{g} r \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{250}{9{,}81} \cdot 0{,}45 \left(\frac{\pi \cdot 100}{30}\right)^2$$

$C_f = 125{,}6$ N

Normalna sila

$N = C_f = 125{,}6$ N

Sila trenja

$T = \mu N = 0{,}2 \cdot 125{,}6$

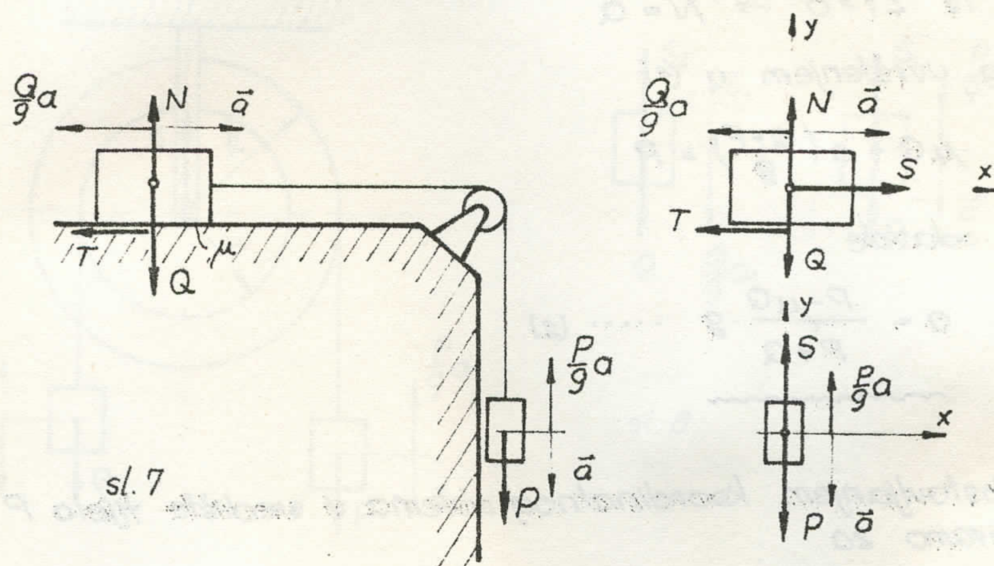
$T = 25{,}12$ N

ZADATAK 7

Tijelo težine Q leži na horizontalnoj podlozi zadanog koeficijenta trenja (sl.7). Na tijelo je privezan konac i prebačen preko kolotura (bez trenja), tako da na njegovom kraju visi teret P.

Potrebno je naći:

a) ubrzanje tereta Q
b) silu u užetu



sl. 7

Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom d'Alambertovog principa za kruto tijelo kojim se dinamički sistem svodi na analogni statički, tako da vrijede statički uvjeti ravnoteže.

D'Alambertov princip za kruto tijelo glasi:

Pri gibanju krutog tijela vanjske sile $\vec{P}_i$ i sile inercije $-m_i\,\vec{a}_i$ (d'Alambertove sile) stoje u svakom trenutku u ravnoteži, tj. možemo pisati:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{n} (-m_i\,\vec{a}_i) = 0$$

Ucrtavanjem odgovarajućih sila (vidu sliku) umjesto uklonjenih veza možemo postaviti statičke uvjete ravnoteže:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum M = 0$$

a) Postavimo li koordinatni sistem xY u središte tijela Q možemo napisati:

$$\Sigma X = 0$$

$$-T - \frac{Q}{g}a - \frac{P}{g}a + P = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

sila trenja $T = \mu N$

iz $\Sigma Y = 0 \rightarrow N = Q$

pa uvrštenjem u (1)

$$\mu Q + a\left(\frac{Q+P}{g}\right) = P$$

i odavde

$$a = \frac{P - \mu Q}{P + Q} \cdot g \quad \ldots\ldots (2)$$

b) Postavljanjem koordinatnog sistema u središte tijela P dobivamo za

$$\Sigma Y = 0$$

$$P - \frac{P}{g}a - S = 0$$

i odavde uvrštenjem izraza (2)

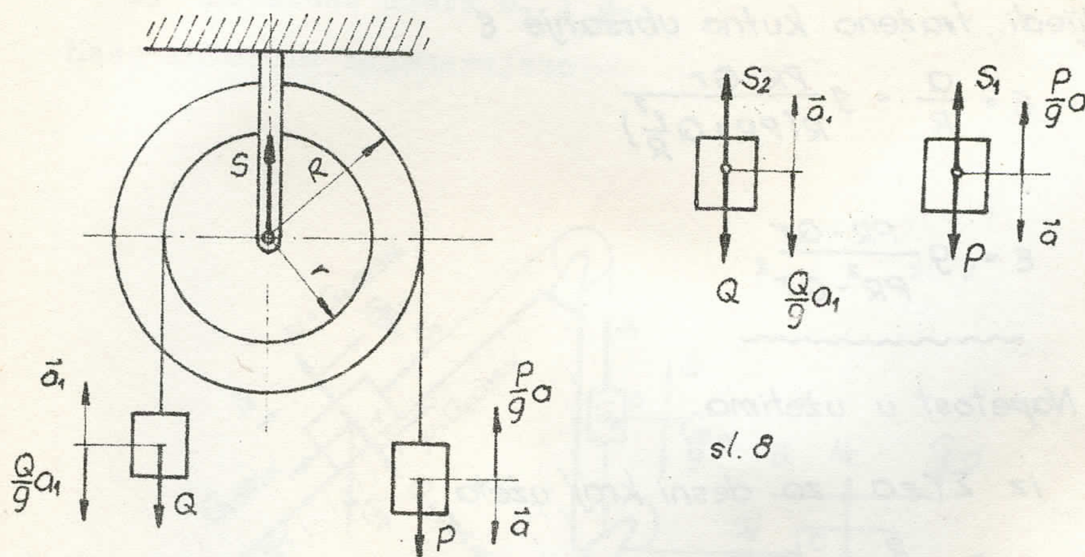
$$S = P - \frac{P}{g}a = P - \frac{P}{g}\,\frac{P - \mu Q}{P + Q}\,g$$

odnosno sređivanjem

$$S = \frac{PQ(1+\mu)}{P+Q}$$

ZADATAK 8

Treba naći kutno ubrzanje kolotura prema slici 8. (masu zanemarujemo) te napetost oba kraka užeta i reakciju u osovini kolotura, ako je zadano P, Q, R, r.



sl. 8

Rješenje:

Dodavanjem odgovarajućih d'Alambertovih sila inercije možemo postaviti statičke uvjete ravnoteže

a) Kutno ubrzanje ε

iz $\Sigma M_o = 0$

$$P \cdot R - \frac{P}{g} a \cdot R - Q \cdot r - \frac{Q}{g} a \frac{r}{R} \cdot r = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Teret Q se giba ubrzanjem a_1 koje je iz odnosa radijusa r i R lako odrediti, tj.

$$a : R = a_1 : r$$

$$a_1 = a \frac{r}{R}$$

pa je d'Alambertova sila za teret Q

$$\frac{Q}{g} a_1 = \frac{Q}{g} \cdot a \frac{r}{R}$$

iz izraza (1) dobivamo tangencijalno ubrzanje na radijus R

$$a = g\frac{PR - Qr}{PR + \frac{Qr^2}{R}}$$

a prema izrazu

$$a_t = a = R \cdot \varepsilon$$

slijedi traženo kutno ubrzanje ε

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = g\frac{PR - Qr}{R(PR + Q\frac{r^2}{R})}$$

$$\varepsilon = g\frac{PR - Qr}{PR^2 - Qr^2}$$

b) Napetost u užetima

iz $\Sigma Y = 0$ za desni kraj užeta

$$S_1 + \frac{P}{g}a - P = 0$$

$$S_1 = P - \frac{P}{g}a = P - \frac{P}{g}g\frac{PR - Qr}{PR + Q\frac{r^2}{R}}$$

$$S_1 = P\frac{Qr(1 + \frac{r}{R})}{PR + Q\frac{r^2}{R}} = PQ\frac{1 + \frac{r}{R}}{P\frac{R}{r} + Q\frac{r}{R}} = PQr\frac{R + r}{PR^2 + Qr^2}$$

iz $\Sigma Y = 0$ za lijevi kraj užeta

$$+Q + \frac{Q}{g}a\frac{r}{R} = S_2$$

$$S_2 = Q(1 + \frac{a}{g}\frac{r}{R}) = Q\left(1 + \frac{1}{g}\frac{r}{R}g\frac{PR - Qr}{PR + \frac{Qr^2}{R}}\right)$$

$$S_2 = QPR\frac{R + r}{PR^2 + Qr^2}$$

c) Reakcija u osovini

$$S_0 = S_1 + S_2 = PQ\frac{(R + r)^2}{PR^2 + Qr^2}$$

ZADATAK 9

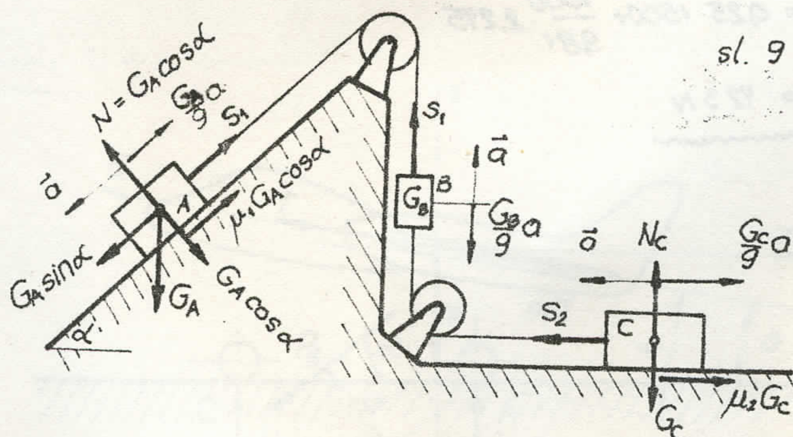
Sistem od tri tijela A, B i C (sl.9), težine

$G_A = 2000$ N $\mu_1 = 0{,}05$
$G_B = 400$ N $\mu_2 = 0{,}25$
$G_C = 1500$ N $\alpha = 60^\circ$

nalazi se u stanju mirovanja.
U nekom trenutku sistem se počinje slobodno gibati.
Potrebno je odrediti:

a) ubrzanje tijela ovog sistema
b) napetost užeta S_1 i S_2

Mase kolotura zanemarujemo



sl. 9

Rješenje:

Dodavanjem d'Alambertovih sila i reakcija veza možemo izvršiti sumiranje svih sila u smjeru užeta.

$$G_A \sin\alpha - \mu_1 G_A \cos\alpha - G_B - \mu_2 G_C = \frac{a}{g}(G_A + G_B + G_C)$$

odavde je

$$a = g\,\frac{G_A(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) - G_B - \mu_2 G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$a = 9{,}81\,\frac{2000(\sin 60 - 0{,}05\cos 60) - 400 - 0{,}25\cdot 1500}{2000 + 400 + 1500} = \underline{2{,}275\ m/sek^2}$$

b)

Promatranjem ravnoteže tijela A dobivamo silu S_1

$$S_1 = G_A \sin\alpha - \mu_1 G_A \cos\alpha - \frac{G_A}{g} a$$

$$S_1 = 2000 \sin 60 - 0{,}05 \cdot 2000 \cos 60 - \frac{2000}{9{,}81} \cdot 2{,}275$$

$$S_1 = 1218 \, N$$

Promatranjem ravnoteže tijela C dobivamo silu S_2

$$S_2 = \mu_2 G_c + \frac{G_c}{g} a$$

$$S_2 = 0{,}25 \cdot 1500 + \frac{1500}{9{,}81} \cdot 2{,}275$$

$$S_2 = 723 \, N$$

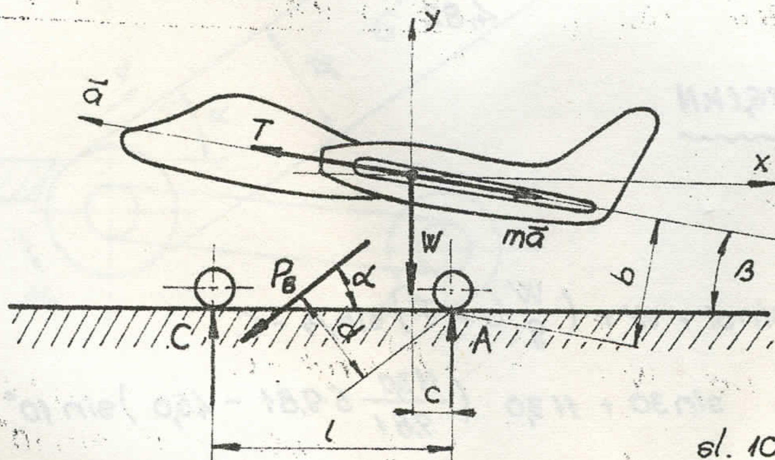
ZADATAK 1o

Mornarički lovac s bazom na nosaču avinna s dva mlazna motora i brzinom od preko 1o5o km/h prikazan je na katapultu (sl.1o). Sila P_b vuče avion niz katapult. Težina aviona W=113 kN, a potisak T=45 kN. Ubrzanje aviona a=5 g.

Potrebno je odrediti silu P_b i reakcije na prednje i stražnje kotače, ako zenemarimo trenje na kotačima.

Osim toga zadano je:

b =	1,65 m	ℓ =	4,32 m
c =	o,76 m	α =	30°
d =	1,52 m	β =	10°



sl. 10

Rješenje:

Ucrtavanjem odgovarajućih sila umjesto veza postavljamo statičke uvjete ravnoteže

$$\Sigma X = 0$$

$$\left(-T + \frac{W}{g}a\right)\cos\beta - P_b\cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$P_b = \frac{\left(-T + \frac{W}{g}a\right)\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\left(-45{,}0 + \frac{113{,}0}{9{,}81}\cdot 5\cdot 9{,}81\right)\cos 10^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$P_b = 591\,kN$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\left(T - \frac{W}{g}a\right)\sin\beta - P_b \sin\alpha - W + A + C = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$C \cdot l + \left(\frac{W}{g}a - T\right)b - P_b \cdot d - W \cdot c = 0 \quad \ldots (3)$$

iz (3)

$$C = \frac{P_b \cdot d + W \cdot c - \left(\frac{W}{g}a - T\right)b}{l}$$

$$C = \frac{59\,1{,}0 \cdot 1{,}52 + 11\,3{,}0 \cdot 0{,}76 - \left(\frac{113{,}0}{9{,}81} \cdot 5 \cdot 9{,}81 - 45{,}0\right)1{,}65}{4{,}82}$$

$$\underline{C = 26{,}1\ kN}$$

iz (2)

$$A = P_b \sin\alpha + W + \left(\frac{W}{g}a - T\right)\sin\beta - C$$

$$A = 59{,}1 \ \sin 30 + 11\,3{,}0 \ \left(\frac{113{,}0}{9{,}81} 5 \cdot 9{,}81 - 45{,}0\right)\sin 10^\circ - 26{,}1$$

$$\underline{A = 47\,2{,}7\ kN}$$

ZADATAK 11

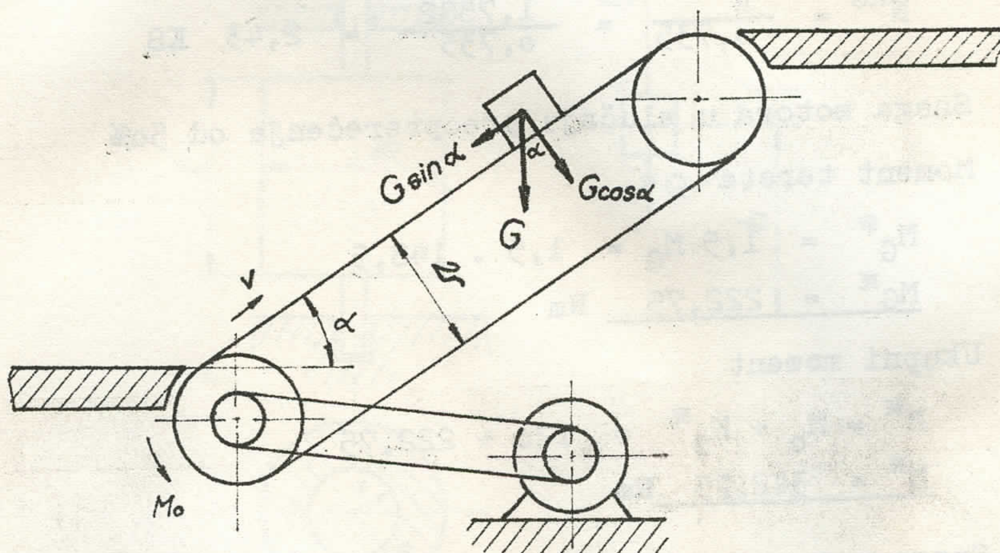
Traka za prenošenje sanduka brzinom od v=1 m/s može odjednom primiti 5 sanduka, svaki po G=4oo N. Nagib trake iznosi $tg\,\alpha = \frac{4}{7}$, širina b=2r=3o cm, a ukupni protumoment u praznom hodu M_c = 12o Nm (sl.11).

Traži se:

a) potrebna snaga motora za pogon trake

b) kolika je snaga motora za slučaj preopterećenja od 5o%

sl. 11



Rješenje:

a) *Snaga motora*

$$N = M \cdot \omega \quad [kpm/s]$$

Kutna brzina

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{\frac{0{,}3}{2}} = 6{,}66 \; s^{-1}$$

Moment koji mora motor savladati

$$M = M_o + M_G$$

M_o = 120 Nm ··· *protumoment u praznom hodu*

$M_G = 5G \sin\alpha \cdot r$ ··· *moment tereta*

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = 0{,}495$$

$G = 4oo\ N$

$r = o{,}15\ m$

$M_G = 5.4oo.o{,}495.o{,}15 = 148{,}5\ Nm$

$M = M_o + M_G = 12o + 148{,}5$

$\underline{M = 268{,}5\ Nm}$

Snaga motora

$N = M \cdot \omega = 268{,}5 \cdot 6{,}66 = 1788{,}2\ Nm/s$

$\underline{N = 1788{,}2}\ J/S = 1788{,}2\ W$

$N^{kW} = 1{,}7882\ kW$

$N^{ks} = \frac{N^{kW}}{o{,}735} = \frac{1{,}7882}{o{,}735} = 2{,}43\ KS$

b) Snaga motora u slučaju preopterećenja od 5o%

Moment tereta

$M_G^{*} = 1{,}5\ M_G = 1{,}5 \cdot 148{,}5$

$\underline{M_G^{*} = 222{,}75}\ Nm$

Ukupni moment

$M^{*} = M_o + M_G^{*} = 12o + 222{,}75$

$\underline{M^{*} = 342{,}75\ Nm}$

Snaga motora

$N^{*} = M^{*} \cdot \omega = 342{,}75 \cdot 6{,}66$

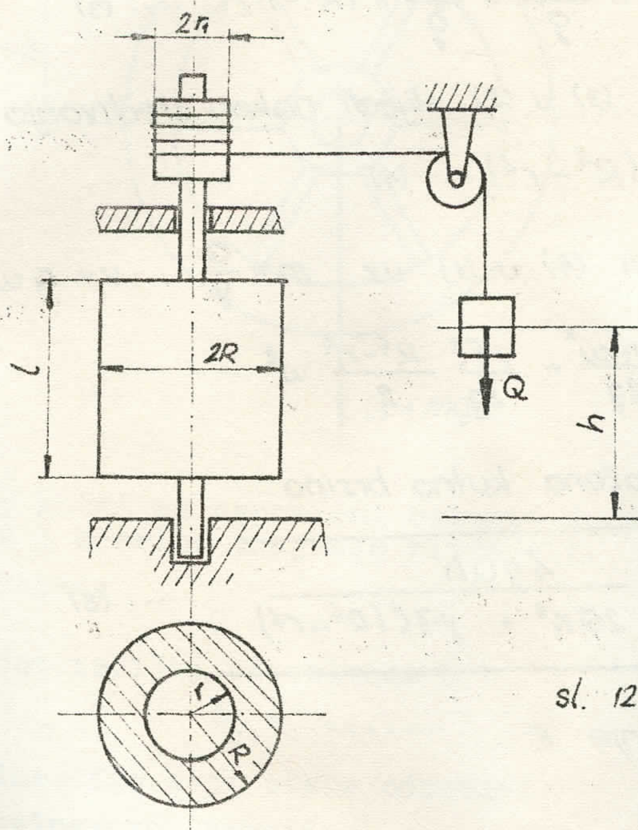
$\underline{N^{*} = 2282{,}71\ Nm/s =}\ 2282{,}71\ W$

$N^{kW} = 2{,}282\ kW$

$N^{KS} = \frac{N^{kW}}{o{,}735} = 3{,}1\ KS$

ZADATAK 12

Treba naći kutnu brzinu i kutno ubrzanje šupljeg valjka prema sl.12. kad se teret Q spusti za h (m) .



sl. 12

Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom zakona kinetičke energije krutog tijela, koji glasi:

Kinetička energija krutog tijela jednaka je sumi kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije, pri čemu je težište tijela točka referencije, odnosno

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

Za ovaj primjer kinetička energija krutog tijela (šuplji valjak) ujedno je jednaka radu tereta Q na putu h, tj. možemo napisati

$$E = Q \cdot h = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

jer je $E_0 = 0$ (kinet. energija u stanju mirovanja)

Moment inercije šupljeg valjka obzirom na vertikalnu težišnu os (os vrtnje)

$$J = \frac{m_v}{2}(R^2 + r^2) \quad \ldots (2)$$

Masa valjka

$$m_v = \frac{G_v}{g} = \frac{V_v \cdot \gamma}{g} = \frac{\gamma}{g}\pi(R^2 - r^2)\ell \quad \ldots (3)$$

Uvrštenjem (3) u (2) slijedi nakon sređivanja

$$J = \frac{\gamma\pi\ell}{2g}(R^4 - r^4) \quad \ldots (4)$$

i uvrštenjem (4) u (1) uz $m = \frac{Q}{g}$ i $v = r_1\omega$

$$Q \cdot h = \frac{Q r_1^2 \omega^2}{2g} + \frac{\gamma\pi\ell}{2g}\,\frac{R^4 - r^4}{2}\,\omega^2$$

i odavde tražena kutna brzina

$$\omega = \sqrt{\frac{4gQh}{2Qr_1^2 + \gamma\pi\ell(R^4 - r^4)}} \quad \ldots (5)$$

Kutno ubrzanje ε

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Deriviranjem izraza (5) s time da pišemo na lijevoj strani ω^2, tj. bez drugog korijena na desnoj, dobivamo

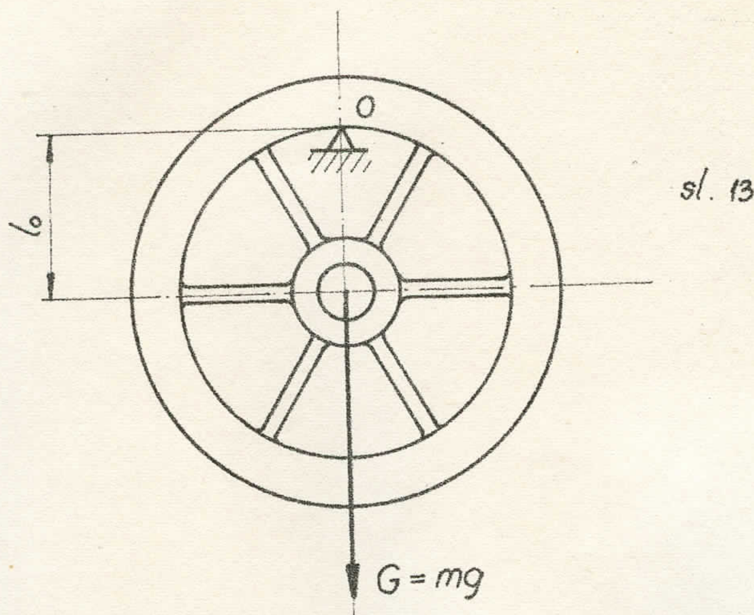
$$2\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{4gQ}{2Qr_1^2 + \gamma\pi\ell(R^4 - r^4)} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \qquad \frac{dh}{dt} = v = r_1\omega$$

pa uzimajući to u obzir slijedi

$$\varepsilon = \frac{4gQr_1}{4Qr_1^2 + 2\gamma\pi\ell(R^4 - r^4)}$$

I - PRIMJER za eksperimentalno određivanje momenta inercije zamašnjaka (ili remenice) s obzirom na os kroz njegovo težište <u>njihanjem</u> (sl.13).



sl. 13

Objesimo kotač na nepomični oslonac O, pustimo ga da slobodno oscilira i mjerimo trajanje titraja T.

Težina kotača

$$G = mg$$

Udaljenost težišta od oslonca O

$$l_o = \ldots\ldots \quad [m]$$

Moment inercije koji treba odrediti:

Prema Steinerovom pravilu

$$J_o = J_s + m\,l_o^2 = J_s + \frac{G}{g}\,l_o^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ako je $T = \ldots$ [sek] izmjereno trajanje titraja, onda se

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{G_o}}$$

odnosno odavde je

$$J_o = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 G\,l_o \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

II Izjednačivanjem izraza (1) i (2) slijedi

$$G\,l_o\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = J_o = J_s + \frac{G}{g}\,l_o^2$$

i odavde traženi moment inercije J_s

$$J_s = G\,l_o\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - \frac{l_o}{g}\right]$$